بسمه تعالی

مدت امتحان: $1\frac{3}{4}$

نام و نام خانوادگی: MASTER

۱ـ ماتریس زیر را قطری کنید و سپس آن را از نظر فرم مربعی حاصل از آن، بگویید چگونه است.
(یعنی + معین، - معین یا .....)

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

2ـ مسئله زیر را به روش ترسیمی حل کنید

$$\text{Minimize} \quad f(x) = x_1^2 + x_2 + 4$$

$$\text{Subject to} \quad c_1(x) = -x_1^2 - (x_2+4)^2 + 16 \geq 0$$

$$c_2(x) = x_1 - x_2 - 6 \geq 0$$

3- برای تابع

$$f(x) = x_1^3 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$$

i) گرادیان تابع را در نقطه $(1,1,1)$ حساب کنید

ii) ماتریس هسین را در نقطه $(2,1,1)$ حساب کنید

iii) تابع $f(x)$، Convex است؟ Why or why not?

IV) برای $x_1 > 1$، تابع $f(x)$ Convex است یا نه؟

V) نقطه $(0,0,0)$، چه نقطه ای است؟

4ـ مسئله

$$\text{Minimize} \quad f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 5x_1 - 2x_2 + 10$$

Subject to the Constraints

$$h_1 = x_1 + 2x_2 - 3 = 0$$

$$g_1 = 3x_1 + 2x_2 - 6 \leq 0$$

تمام سؤالات زیر پاسخ داده و جواب خود را توضیح کنید.

i) شرط لازم KKT را بنویسید.

ii) حالت های مختلف مسئله چند تا است؟ آنها را مشخص کنید

iii) جواب مسئله را برای حالتی که g_1 فعال است پیدا کنید.
آیا این حالت قابل قبول است؟

۵- جهت کاهش "descent direction" چیست؟

اگر d جواب معادله $Wd = -\nabla f$ باشد، برای اینکه d جهت کاهش باشد چه شرطی برای W قائل هستید؟

۶- مسئله زیر را بروش گرادیان مزدوج Conjugate Gradient حل کنید.

$$\min \quad f(x) = 4x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$$

$$x_0 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Pr. # 1

$$H=\begin{pmatrix}1&-2&4\\-2&2&0\\4&0&7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&4\\\boxed{-2}&-2&8\\\boxed{4}&8&-9\end{pmatrix}\sim$$

$$\begin{pmatrix}1&-2&4\\\boxed{-2}&-2&8\\\boxed{4}&\boxed{-4}&23\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$H=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\4&-4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&0\\&-2&\\0&&23\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&4\\0&1&-4\\0&0&1\end{pmatrix}$$

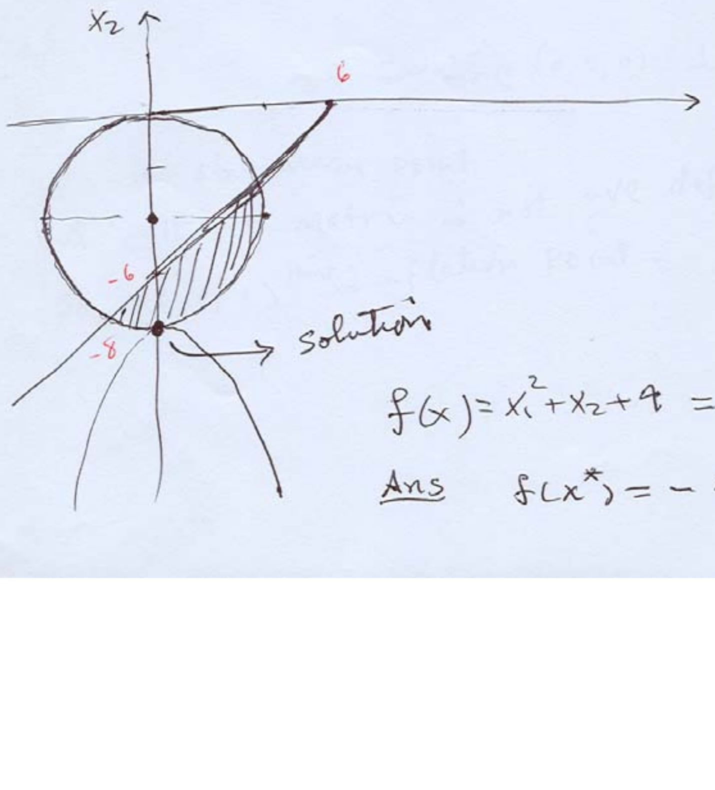
با توجه به اینکه عناصر قطری ماتریس D هم + است و هم − $\Leftarrow$

لذا ماتریس indefinite میباشد

مسئله 2

مسئله زیر را بروش ترسیمی حل کنید

$$\text{Minimize}\quad f(x)=x_1^2+x_2+4$$
$$\text{Subject to}\quad c_1(x)=-x_1^2-(x_2+4)^2+16\geq 0$$
$$c_2(x)=x_1-x_2-6\geq 0$$



$$f(x)=x_1^2+x_2+4=-4$$

Ans $f(x^*)=-4$

Ans

Pr. #3

$$f(x) = x_1^3 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$$

i) گرادیان تابع را در نقطه $\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}$ حساب کنید

$$\nabla f(x) = \begin{Bmatrix} 3x_1^2 + 4x_3 \\ 4x_2 + 2x_3 \\ 4x_3 + 4x_1 + 2x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7 \\ 6 \\ 10 \end{Bmatrix}$$

ii) Hessian Matrix در نقطه $(2, 1, 1)$

$$H = \begin{pmatrix} 6x_1 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

iii) is the function $f(x)$ a Convex function?
why or why not?

تابع Convex نیست!

IV برای $x_1 > 1$ تابع Convex است.
چون دترمینان های جزئی ماتریس همگی مثبت اند.

V نقطه $(0, 0, 0)$ چه نقطه ای است؟

is stationary point
but the H. matrix is not +ve def.
So $(0, 0, 0)$ point is inflation point.

Pr $\neq 4$ Minimize $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 5x_1 - 2x_2 + 10$

S.t

$$h_1 = x_1 + 2x_2 - 3 = 0$$
$$g_1 = 3x_1 + 2x_2 - 6 \leq 0$$

۱) شرط لازم KKT را بنویسید.

The Lagrangian function is

$$L = x_1^2 + 2x_2^2 - 5x_1 - 2x_2 + 10 + \lambda_1(x_1 + 2x_2 - 3) + \lambda_2(3x_1 + 2x_2 - 6 + S^2)$$

The K-T Condition is

$$\begin{cases} 2x_1 - 5 + \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ 4x_2 - 2 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 6 + S^2 = 0 \\ \lambda_2 S = 0 \end{cases} \qquad \lambda_2 \geq 0$$

۲) حالت ها در تحقیق مسئله چند تا است؟ آنها را مشخص کنید.

Two Cases

Case 1: $S = 0$

Case 2: $\lambda_2 = 0$

iii) g_1 is active

Case $S = 0$

$\Rightarrow x_1 = 1.5, \quad x_2 = .75$

$\lambda_1 = -1.75 \quad \lambda_2 = 1.25$

Since $\lambda_2 > 0$

The Solution is acceptable.

5- جهت کاهش "descent direction" چیست؟

اگر d جواب معادله $Wd = -\nabla f$ باشد، برای اینکه d جهت کاهش باشد چه شرطی برای W قائل هستید؟

6- مسئله زیر را با روش گرادیان مزدوج Conjugate Gradient حل کنید.

$$\text{Min} \quad f(x) = 4x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2$$

$$x_0 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Pr. #5 if $\nabla f^T(x)\, d < 0$ Then d is the descent direction

$$Wd = -\nabla f \Rightarrow d = -W^{-1} \nabla f$$

then $\nabla f^T(x)\, d = -\nabla f^T(x)\, W^{-1} \nabla f(x) \Rightarrow W^{-1}$ or W should be +ve def.

Pr. #6

$$\text{Min } f(x) = 4x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2$$

$$\nabla f(x) = \begin{Bmatrix} 8x_1 - 2x_2 \\ 2x_2 - 2x_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow d_0 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \quad , \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = x_0 + \alpha d_0 = \begin{Bmatrix} +1 \\ +1 \end{Bmatrix} + \alpha d_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \alpha \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1-\alpha \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$f(x_1) = 4(1-\alpha)^2 + 1 - 2(1-\alpha)$$

$$\frac{df}{d\alpha} = 0 = -8(1-\alpha) + 2 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{4}$$

as a result $x_1 = \begin{Bmatrix} 1/4 \\ 1 \end{Bmatrix}$

برای تعیین جهت مزدوج داریم:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4d_1 - d_2 \\ -d_1 + d_2 \end{bmatrix} = d_2 - 4d_1 = 0 \Rightarrow d_2 = 4d_1$$

or $d^1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \end{Bmatrix}$

$$x_2 = x_1 + \alpha d$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{Bmatrix} + \alpha \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha + \frac{1}{4} \\ 4\alpha + 1 \end{Bmatrix}$$

$$f(x) = 4\left(\alpha + \frac{1}{4}\right)^2 + (4\alpha+1)^2 - 2\left(\alpha + \frac{1}{4}\right)(4\alpha+1)$$

$$\frac{df}{d\alpha} = 0 = 8\left(\alpha + \frac{1}{4}\right) + 8(4\alpha+1) - 2\left[4\alpha+1+4\alpha+1\right] = 0$$

$$\cancel{8}\alpha + 2 + \cancel{32}\alpha + 8 - 16\alpha - 4 = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{4}$$

and $x_2 = \begin{Bmatrix} \alpha + \frac{1}{4} \\ 4\alpha+1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$