بسمه تعالی

نام و نام خانوادگی MASTER

مدت امتحان ۲ ساعت

2 نمره

۱- تابع $f(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2$ را بفرم ماتریسی بنویسید.

$$f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

OR

$$\frac{1}{2} x^T \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

۵ مسائل هر کدام 3 نمره

۲- در مسأله بهینه سازی زیر:

$$\text{Min } f(x) = x_1^2 + 16x_2^2$$

برای اینکه روش بهینه‌سازی کاشی Steepest Descent، همگرائی سریعتری داشته باشد از چه متغیری باید استفاده کنیم؟ با ذکر دلیل

<u>Solution</u>

$$\text{Let } \begin{array}{l} y_1 = x_1 \\ y_2 = 4x_2 \end{array} \rightarrow f(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2$$

$$\text{Let } y_0 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \rightarrow y_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \alpha(-\nabla f(y))$$

$$\nabla f(y) = \begin{Bmatrix} 2y_1 \\ 2y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \rightarrow \{y_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -2\alpha \\ -2\alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1-2\alpha \\ 1-2\alpha \end{Bmatrix}$$

$$f(y_1) = (1-2\alpha)^2 + (1-2\alpha)^2$$

$$\frac{df}{d\alpha} = -4(1-2\alpha) - 4(1-2\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 1/2$$

$$\text{Means } \{y_1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{x_1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

در یک Step جواب خواهیم رسید

3- تابع f(x) بصورت زیر داده شده است:

$$f(x) = 2x_1^3 + x_2^2 + x_1^2 x_2^2 + 4x_1 x_2 + 3$$

فرم تقریبی مربعی تابع را در نقطه $X+\delta$ پیدا کنید، در صورتیکه $X=\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}$

<u>Solution</u> $$f(x+\delta) \approx f(x) + g(x)^T\delta + \frac{1}{2}\delta^T H(x)\delta$$

$$g(x) = \begin{Bmatrix} 6x_1^2 + 2x_1x_2^2 + 4x_2 \\ 2x_2 + 2x_1^2 x_2 + 4x_1 \end{Bmatrix} \rightarrow g(x)\Big|_{1,1} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 8 \end{Bmatrix}$$

$$H(x) = \begin{bmatrix} 12x_1 + 2x_2^2 & 4x_1x_2 + 4 \\ 4x_1x_2 + 4 & 2 + 2x_1^2 \end{bmatrix} \Rightarrow H(1,1) = \begin{bmatrix} 14 & 8 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$f(1,1) = 11 \rightarrow f(x+\delta) = 11 + \begin{bmatrix}12 & 8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta_1\\\delta_2\end{Bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}14 & 8\\8 & 4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta_1\\\delta_2\end{Bmatrix}$$

$$\boxed{f(x+\delta) = 11 + 12\delta_1 + 8\delta_2 + 7\delta_1^2 + 8\delta_1\delta_2 + 2\delta_2^2}$$

-4

minimize $y = (x_1-1)^2 + (x_2-1)^2$

Subject to $\psi = x_1 + x_2 - 1 \leq 0$

<u>Solution</u>

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} + u\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 0 \qquad (1) \rightarrow \quad 2(x_1-1) + u = 0$$

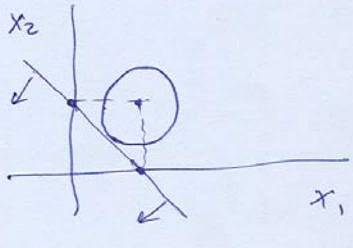
$$\frac{\partial y}{\partial x_2} + u\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = 0 \qquad (2) \rightarrow \quad 2(x_2-1) + u = 0$$

$x_1 = x_2 = 1/2$

$$x_1 + x_2 = 1 \qquad (3) \qquad u = -2(x_1-1) = 1$$

$$u\psi = 0 \qquad (4) \qquad \text{or } \psi \text{ is binding}$$

$$u \geq 0$$



۷ - مسئله زیر را بروش گرادیان مزدوج Conjugate Gradient حل کنید

$$\text{Min } f(x) = 4x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2$$

$$X_0 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Solution

$$\nabla f(x) = \begin{Bmatrix} 8x_1 - 2x_2 \\ 2x_2 - 2x_1 \end{Bmatrix} \rightarrow d_0 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$x_1 = x_0 + \alpha d_0 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \alpha \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1-\alpha \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$f(x_1) = 4(1-\alpha)^2 + 1 - 2(1-\alpha)$$

$$\frac{df}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{4}$$

as a result $x_1 = \begin{Bmatrix} 1/4 \\ 1 \end{Bmatrix}$

برای تعیین جهت مزدوج داریم .

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 4d_1 - d_2 \\ -d_1 + d_2 \end{Bmatrix} = d_2 - 4d_1 = 0 \rightarrow d_2 = 4d_1$$

$$\text{OR } d^1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

$$X_2 = x_1 + \alpha d$$
$$= \begin{Bmatrix} 1/4 \\ 1 \end{Bmatrix} + \alpha \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha + \frac{1}{4} \\ 4\alpha + 1 \end{Bmatrix}$$

$$f(x) = 4\left(\alpha + \frac{1}{4}\right)^2 + (4\alpha+1)^2 - 2\left(\alpha + \frac{1}{4}\right)(4\alpha+1)$$

$$\frac{df}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{4}$$

and $X_2 = \begin{Bmatrix} \alpha + \frac{1}{4} \\ 4\alpha + 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

3- یک تکرار از روش سریع‌ترین کاهش Steepest descent، را برای تابع زیر انجام دهید.

$$f(x) = x_1^2 + \cancel{3x_1x_2}\; 3x_2^2 - 2x_1x_2$$

with $x_0 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

Solution

$$f(x_1,x_2) = \frac{1}{2}[x_1\ x_2]\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x) = \begin{Bmatrix} 2x_1 - 2x_2 \\ 6x_2 - 2x_1 \end{Bmatrix}$$

which yields

$$\nabla f(x_0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

Thus we minimize

$$\varphi(t) = f(x_0 - t\,\nabla f(x_0)) \qquad f\left(\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} - t\begin{Bmatrix} 0 \\ 4 \end{Bmatrix}\right)$$

$$\varphi'(t) = \nabla f\begin{pmatrix} 1 \\ 1-4t \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-2+8t \\ 6-24t-2 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ -4 \end{Bmatrix}$$

$$\varphi'(t) = -24 + 96t + 8 = 0 \quad \Rightarrow t = \frac{1}{6}$$

$$x_1 = x_0 - t_0\,\nabla f(x_0)$$

$$= \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} - \frac{1}{6}\begin{Bmatrix} 0 \\ 4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1/3 \end{Bmatrix}$$

روش دیگر طبق جزوه سرکلاس

$$\alpha = \frac{r_0^T r_0}{r_0^T A r_0} \quad ; \quad r = b - Ax_0$$

$$r_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_0 = \frac{[0\ \ -2]\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}}{[0\ \ -2]\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$x_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1/3 \end{Bmatrix} \quad \underline{\underline{\text{Ans}}}$$

بسمه تعالی

نام و نام خانوادگی MASTER

مدت امتحان: 2 ساعت

1 - تابع $f(x) = x_1^2+2x_1x_2+4x_2^2$ را بفرم مربعی بنویسید. 2 نمره

2 - در مسأله بهینه سازی زیر:

$$\text{Min} \quad f(x) = x_1^2+16x_2^2$$ 2 نمره

برای اینکه روش بیشترین کاهش Steepest Descent همگرایی سریعتری داشته باشد از چه تغییر متغیری باید استفاده کنیم؟ با ذکر دلیل.

3 - تابع $f(x)$ بصورت زیر داده شده است: 4 نمره

$$f(x) = 2x_1^3+x_2^2+x_1^2x_2^2+4x_1x_2+3$$

فرم تقریبی مربعی تابع را در نقطه $x+\delta$ پیدا کنید، در صورتیکه $x=\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}$

4 - 4 نمره

$$\text{Minimize} \quad y=(x_1-1)^2+(x_2-1)^2$$

$$\text{Subject to} \quad \psi = x_1+x_2-1 \le 0$$

5 - نقاط بحرانی Critical points و ماهیت آنها برای تابع زیر بدست آورید. 4 نمره

$$f(x) = -9x_1+x_1^3+4x_2+x_2^2-2x_1x_2$$

6 - مسأله زیر را با یک مرحله تکرار حل کنید. 4 نمره

$$\min_{x} f(x) = 4x_1^2+x_2^2-2x_1x_2$$

line Search

$x_0 = \begin{Bmatrix}-1\\-1\end{Bmatrix}$

$d_0 = \begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1}&=0\\ \frac{\partial f}{\partial x_2}&=0\end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned}x_1&=0\\ x_2&=0\end{aligned}\right.$$

Pr. #6

$$x_1 = x_0 + \alpha d_0 = \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix} + \alpha \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha - 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$f(x_1) = 4(\alpha-1)^2 + 1 + 2(\alpha-1)$$

$$\frac{df}{d\alpha} = 0 = 8(\alpha-1) + 2 = 0 \implies \alpha = 3/4$$

as a resault $x_1 = \begin{Bmatrix} -1/4 \\ -1 \end{Bmatrix}$

برای تعیین جهت مزدوج داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 4d_1 - d_2 \\ -d_1 \end{pmatrix} = 4d_1 - d_2 = 0 \rightarrow d_2 = 4d_1$$

or $d^1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \end{Bmatrix}$

$$x_2 = x_1 + \alpha d$$

$$= \begin{Bmatrix} -1/4 \\ -1 \end{Bmatrix} + \alpha \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha - 1/4 \\ 4\alpha - 1 \end{Bmatrix}$$

$$f(x) = 4\left(\alpha - \frac{1}{4}\right)^2 + (4\alpha-1)^2 - 2\left(\alpha - \frac{1}{4}\right)(4\alpha - 1)$$

$$\frac{df}{d\alpha} = 0 \implies \alpha = \frac{1}{4}$$

and $x_2 = \begin{Bmatrix} \alpha - \frac{1}{4} \\ 4\alpha - 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ which is the Correct answer