باسمه تعالی

مدت امتحان ۳ ساعت
بارم سؤالات یکسان است.
هر مسأله 5 نمره
تیر ۸۶ ۹۴

نام و نام خانوادگی MASTER

۱ـ مسأله بهینه سازی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & (x_1-3)^2 + (x_2-3)^2 \geq 4 \\ & 0 \leq x_1 \leq 3 \\ & 0 \leq x_2 \leq 4 \end{aligned}$$

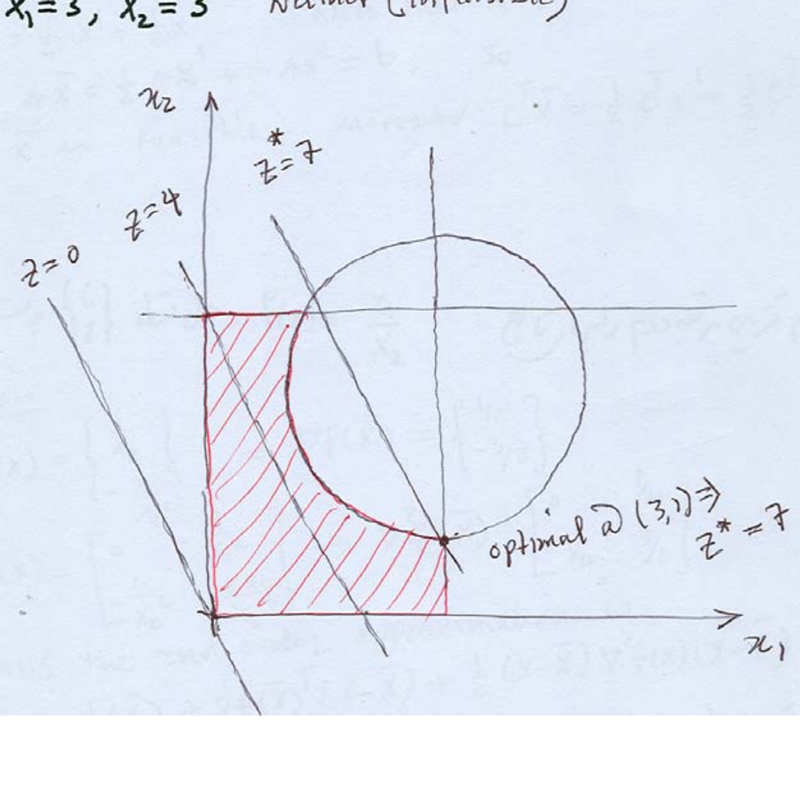
الف) بطور واضح ناحیه شدنی و کانتور تابع هدف را برای این مسأله رسم کنید.

ب) مشخص کنید که نقاط زیر بهینه محلی، کلی یا هیچکدام هستند.

(i) $x_1 = 1, \ x_2 = 3$ Neither

(ii) $x_1 = 3, \ x_2 = 1$ Global

(iii) $x_1 = 3, \ x_2 = 3$ Neither (infeasible)



۲ - آیا امکان این هست که در یک مسأله خطی LP ، ما فقط دو نقطه بهینه داشته باشیم؟
مثلاً برای مسأله زیر:
توضیح کامل لازم است.

$$\begin{aligned} \text{Min } & c^T x \\ \text{s.t } & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Solution

suppose x^1 and x^2 are two optimal solutions, then

$Ax^1 = b$, $x^1 \geq 0$

and $Ax^2 = b$, $x^2 \geq 0$, and

$c^T x^1 = c^T x^2 = z^*$

consider another solution obtained by taking the average of x^1 and x^2, i.e.,

$\bar{x} = \frac{1}{2} x^1 + \frac{1}{2} x^2$. Note that $\bar{x} \geq 0$

and $A\bar{x} = \frac{1}{2} Ax^1 + \frac{1}{2} Ax^2 = b$, so

$\bar{x}$ is feasible. Moreover $c^T\bar{x} = \frac{1}{2} c^T x^1 + \frac{1}{2} c^T x^2 = z^*$

۳ - فرم تقریبی مرتبه دوم را برای تابع $f(x) = \frac{x_1}{x_2}$ ، حول نقطه $\begin{Bmatrix} 6 \\ 2 \end{Bmatrix}$ بدست آورید.

Solution

$$\nabla f(x) = \begin{Bmatrix} \frac{1}{x_2} \\ -\frac{x_1}{x_2^2} \end{Bmatrix} \rightarrow \nabla f(\bar{x}) = \begin{Bmatrix} 1/2 \\ -3/2 \end{Bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{x_2^2} \\ -\frac{1}{x_2^2} & \frac{2x_1}{x_2^3} \end{bmatrix} \rightarrow \nabla^2 f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -1/4 \\ -1/4 & 3/2 \end{bmatrix}$$

Thus the 2nd order approximation is

$$g(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) + \frac{1}{2}(x-\bar{x}) \nabla^2 f(x)(x - \bar{x})$$

$$= 3 + \frac{1}{2}(x_1 - 6) - \frac{3}{2}(x_2 - 2) - \frac{1}{4}(x_1 - 6)(x_2 - 2) + \frac{3}{4}(x_2 - 2)^2$$

$$= 3 + x_1 - 3x_2 - \frac{1}{4} x_1 x_2 + \frac{3}{4} x_2^2$$

4_ مسئله خطی LP زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \text{Min}\quad & x_1 - 3x_2 \\ \text{S.t.}\quad & 2x_1 - x_2 \geq -1 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

الف) مسئله بالا را بفرم استاندارد بنویسید.

ب) با در نظر گرفتن متغیرهای slack و Surplus بعنوان متغیرهای اصلی، بفرمائید در اولین گام روش Simplex، کدام متغیر غیر اصلی وارد محاسبات شده و کدام متغیر Basic از محاسبات خارج میشود و چرا؟

Solution

$$\begin{aligned} \text{Min}\quad & x_1 - 3x_2 \\ \text{S.t.}\quad & -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & 3x_1 + 4x_2 + x_4 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

x_3 and x_4 are Slack variable

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	-2	1	1	0	$1/1 = 1$
x_4	3	4	0	1	$1/4 = 1/4$
Z	1	-3			

Basic variables $x_3 = 1$ and $x_4 = 1$

ابتدا x_2 بعنوان متغیر پایه وارد شود (ضریب آن 3-)

وبا توجه به جدول x_4 بعنوان متغیر پایه خارج شود.

5- ماتریس $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 13 \end{pmatrix}$ را بصورت LL^T تجزیه کنید و با استفاده از نتایج آن مقدار مینیمم تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 13 \end{pmatrix}x - [0 \quad 9]\,x$$

راهنمائی: از تغییر متغیر مناسب استفاده کنید که مسئله در یک مرحله حل شود.

Solution

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ \boxed{-1} & 9 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

or $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

or $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

which is in the form of LLT

تحت دو

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 13 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 9 \end{Bmatrix} = 0 \Rightarrow \{x\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$ جواب صحیح

$f(x) = \frac{1}{2}x^TAx - c^Tx$

$x^TAx = \underbrace{x^TL}_{y^T}\underbrace{L^Tx}_{y} - [0 \quad 9]\,L^{-T}y$

یعنی $f(x) = \frac{1}{2}x^TAx - [0 \quad 9]\,L^{-T}y$

$y = L^Tx$

$x = L^{-T}y$

$x^T = y^TL^{-1}$

$L^T = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$L^{-T} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

یعنی $x = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}\{y\}$

$\cancel{f(x)=}$
$h(y) = \frac{1}{2}y^T\underbrace{L^{-1}L}_{I}\underbrace{L^TL^{-T}}_{I}y - [0 \quad 9]\,L^{-T}y$

$h(y) = \frac{1}{2}y^Ty - [0 \quad 3]\{y\}$

$\nabla h(y) = \{y\} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \end{Bmatrix} = 0 \rightarrow y = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \end{Bmatrix}$

$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

مسئله -6

$$\min \; f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 5x_1 - 2x_2 + 10$$

s.t.

$$h_1 = x_1 + 2x_2 - 3 = 0$$
$$g_1 = 3x_1 + 2x_2 - 6 \leq 0$$

تمام سؤالات زیر پاسخ داده و جواب خود را توجیه کنید.

i) شرط لازم KKT را بنویسید

ii) حالت های مختلف مسئله چند تا است؟ آنها را مشخص کنید.

iii) جواب مسئله را برای حالتی که g_1 فعال است پیدا کنید. آیا این حالت قابل قبول است؟

Solution

$$L = x_1^2 + 2x_2^2 - 5x_1 - 2x_2 + 10 + \lambda_1(x_1 + 2x_2 - 3) + \lambda_2(3x_1 + 2x_2 - 6 + S^2)$$

The KKT condition is

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} 2x_1 - 5 + \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ 4x_2 - 2 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 6 + S^2 = 0 \\ \lambda_2 S = 0 \quad ; \quad \lambda_2 \geq 0 \end{cases}$$

ii) حالت های مختلف مسئله 2 تاست

Case 1 : $S = 0$

Case 2 : $\lambda_2 = 0$

iii) g_1 is active

Case $S = 0$

$\rightarrow \; x_1 = 1.5 \;, \quad x_2 = .75$

$\lambda_1 = -1.75 \;, \quad \lambda_2 = 1.25$

Since $\lambda_2 > 0$

the Solution is acceptable.