

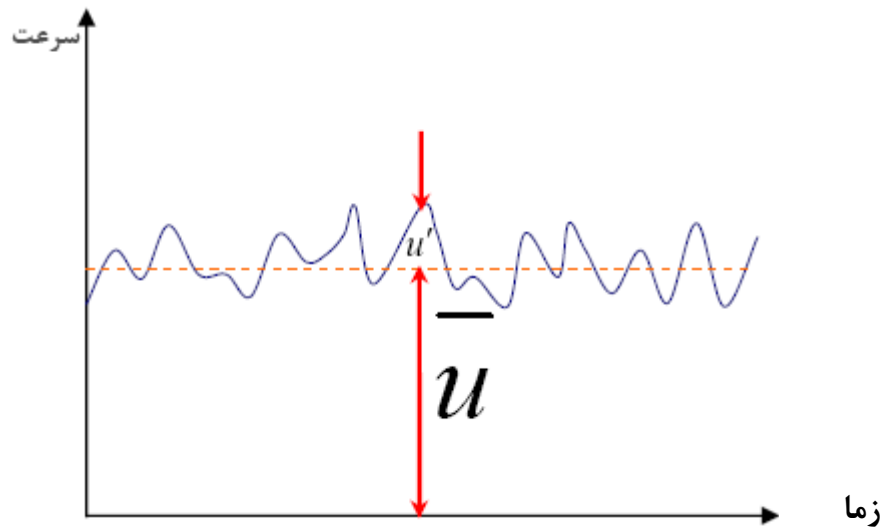
پیوست الف

مدلهای آشفتهگی

۱- معادلات حاکم بر جریان‌های آشفته

روش آماری برای بررسی جریانات آشفته:

یک جریان آشفته درون یک لوله را در نظر بگیرید. چنانچه یک نقطه خاص از میدان جریان درون لوله مزبور را در نظر گرفته و سرعت آن نقطه را بر حسب زمان اندازه‌گیری نمائیم، منحنی شبیه شکل (۱) به دست می‌آید:



شکل (۱): منحنی سرعت لحظه‌ای اندازه‌گیری شده در یک نقطه مشخص از میدان جریان آشفته

همان‌طور که می‌بینیم میدان سرعت آشفته $u(t)$ از برهم‌نهی دو قسمت سرعت متوسط \bar{u} و سرعت نوسانی u' به دست آمده است.

$$u(t) = \bar{u}_{value}^{steady\ mean} + u'(t)_{component}^{fluctuating} \quad (۱)$$

سرعت متوسط زمانی^۱ را به صورت زیر تعریف می‌نمائیم:

$$\bar{u} \equiv \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} dt \quad (۲)$$

که در آن T_1 آنقدر بزرگ انتخاب می‌شود که برای مقادیر زمانی بزرگ‌تر از T_1 تغییری در اندازه انتگرال مزبور مشاهده نشود. به عبارت دیگر \bar{u} مستقل از زمان انتخاب شده T_1 در بیاید. علامت بار (-) بر روی مؤلفه سرعت بیانگر کمیت متوسط زمانی و u' بیانگر مؤلفه نوسانی سرعت می‌باشد. در

^۱ Time Average

بخش‌های بعدی نیاز داریم که مؤلفه‌های نوسانی را به طرق مختلف با یکدیگر ترکیب نمائیم.

به طور کلی کمیت متوسط $\bar{\eta}$ را می‌توان به دو طریق محاسبه نمود:

الف) متوسط‌گیری جمعی^۱

ب) متوسط‌گیری زمانی^۲

معادله پیوستگی برای جریان آشفته:

فرم دیفرانسیلی معادله پیوستگی به فرم زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0 \quad (3)$$

در حالت کلی، معادلات بقاء حاکم بر جریان سیالات آشفته، (یعنی بقای ممنتوم، غلظت، جرم و

انرژی)، به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} \right) = -P_{,i} + (\rho - \rho_0) g_i + \left[\mu (u_{i,j} + u_{j,i}) - \overline{\rho u'_i u'_j} \right]_{,j} \quad (4) \text{ بقای ممنتوم}$$

$$\rho \left(\frac{\partial C}{\partial t} + u_j C_{,j} \right) = \left(\rho \alpha C_{,j} - \overline{\rho u'_j C'} \right)_{,j} + q_c + R \quad (5) \text{ بقای غلظت}$$

$$u_{j,i=0} \quad (6) \text{ بقای جرم (پیوستگی)}$$

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_j T_{,j} \right) = \left(\lambda T_{,j} - \rho c_p \overline{u'_j T'} \right)_{,j} + H \quad (7) \text{ بقای انرژی}$$

پارامتر λ در معادله بیان‌کننده هدایت حرارتی^۳ است. بدین سبب از این شکل استفاده شد تا با انرژی

جنبشی آشفته‌گی (T.K.E.) که آن را با K نمایش می‌دهیم، اشتباه گرفته نشود.

معادلات فوق را اصطلاحاً معادلات RANS نامیده و در ضمن معادلاتی صریح بوده و هیچ فرضی در

به دست آمدن و احیاناً ساده‌سازی آن‌ها نشده است. و لیکن این معادلات تشکیل یک دستگاه بسته^۴ را

نمی‌دهند. (یعنی تعداد مجهولات بیش از تعداد معادلات است)

¹ Ensemble Averaging

² Time Averaging

³ Thermal Conductivity

⁴ Closed Set

معادله انرژی آشفتگی در جریانات آشفته:

چنانچه مجدداً از معادله ممنتوم برای یک جریان تراکم‌ناپذیر با ویسکوزیته ثابت شروع نمائیم، و معادله ممنتوم با کمیت‌های لحظه‌ای در راستای i را در مولفه سرعت در همین راستا ضرب نمائیم و پس از ساده‌سازی به معادله (۸) خواهیم رسید:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u_i u_i}{2} \right) = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[u_i \left(\frac{p}{\rho} + \frac{u_j u_j}{2} \right) \right] + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left[u_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] - \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (8)$$

معادله (۸) دارای واحد انرژی می‌باشد و اصطلاحاً آن را معادله انرژی می‌نامند.

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{u'_i u'_j} = \tau_{ij,Lam} + \tau_{ij,Turb} \quad (9)$$

$$\tau_{ij,Lam} = \mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad \tau_{ij,Turb} = -\rho \overline{u'_i u'_j} \quad \text{for } i \neq j \quad (10)$$

۲- بررسی جریان‌های نزدیک دیواره و مفهوم توابع دیوار

هدف از مباحث ارائه شده در این بخش، مروری بر پروفیل‌های تحلیلی جریان در نزدیکی دیواره می‌باشد. در مدل‌سازی‌های جریانات آشفته به کرات مشاهده شده است که از مفهومی با نام تابع دیواره^۱ استفاده شده است. توابع دیواره در حقیقت پروفیل‌های تحلیلی جریان در لایه مرزی مجاور دیواره هستند که با استفاده از روش‌های تحلیلی و از حل صریح معادلات جریان در نزدیکی دیواره (پس از اعمال برخی فرضیات ساده کننده بر روی معادلات حاکم بر لایه مرزی مجاور دیواره) به دست آمده‌اند، و از آنجا که به صورت تحلیلی به دست آمده‌اند، دیگر خطاهای موجود در روش‌های عددی (که ذات تمام روش‌های عددی و روش‌های گسسته‌سازی میدان جریان هستند) در پروفیل‌های توابع دیواره به چشم نمی‌خورند. بنابراین مزیت استفاده از توابع دیواره را می‌توان به صورت ذیل دسته بندی نمود:

۱. کاهش حجم محاسبات به واسطه عدم نیاز به شبکه‌بندی در نواحی نزدیک دیواره

¹ Wall Function

۲. افزایش دقت محاسبات (برای مسائل نه چندان پیچیده)

البته بایستی توجه داشت که در به دست آوردن توابع دیواره، معمولاً از فرضیات ساده‌کننده ای استفاده می‌شود که کاربرد این توابع را محدود به مسائل دارای هندسه ساده و جریان‌های نسبتاً ساده نموده است.

اگرچه تلاش‌های زیادی در جهت تعمیم این توابع و بالا بردن توانایی آن‌ها جهت مدل کردن پدیده‌های پیچیده‌ای مانند جدایش جریان در گرا دیان فضا^۱، اندرکنش شوک و لایه مرزی^۲، اتصال مجدد جریان^۳، تزریق یا مکش جریان از طریق دیواره^۴ و غیره صورت گرفته است، لیکن هنوز مسیری طولانی در جهت بالا بردن دقت و عمومیت این پروفیل‌های تحلیلی وجود دارد، به طوری که هنوز در بسیاری از مسائل پیچیده مهندسی لاجرم مجبور به شبکه‌بندی نواحی نزدیک دیواره و حل نمودن معادلات RANS درست تا لب دیواره می‌باشیم. نکته جالب در استفاده از توابع دیواره آن است که چنانچه شخص بخواهد از توابع دیواره در نزدیکی دیواره استفاده نماید، حتماً بایستی توجه داشته باشد که از شبکه‌بندی و گسسته‌سازی میدان جریان در نواحی نزدیک دیواره (نواحی‌ای که تابع دیواره مورد نظر برای آن نواحی معتبر می باشد) اکیداً خودداری نماید، در غیر این صورت به واسطه تداخل مفهومی میدان سرعت به دست آمده از توابع دیواره و میدان سرعت محاسبه شده از گسسته‌سازی میدان جریان در نواحی نزدیک دیواره، نتیجه‌گیری به دست آمده از مسأله بعضاً غلط و غیر قابل توجیه می‌گردد.

آزمایشات بی‌شماری نشان داده‌اند که ناحیه نزدیک دیواره را می‌توان به ۳ لایه مجزا تقسیم نمود. در داخلی‌ترین لایه، که اصطلاحاً زیرلایه لزج^۵ نامیده می‌شود، جریان اغلب شبیه جریان آرام می‌باشد، یعنی در این ناحیه، دیفیوژن مولکولی^۶ نقش غالب را در انتقال ممنتوم و انتقال حرارت بر عهده دارد. خارجی‌ترین لایه که اصطلاحاً لایه تمام آشسته^۷ نامیده می‌شود، ادی‌ها نقش غالب را در انتقال ممنتوم

¹ Flow Separation in Adverse Pressure Gradient

² Shock-Boundary Layer Interaction

³ Reattachment

⁴ Flow Transpiration

⁵ Viscous Sublayer

⁶ Molecular Diffusion

⁷ Fully Turbulent Layer

و حرارت بر عهده دارند. در بین این دو ناحیه، ناحیه‌ای به نام لایه گذرا یا میانی یا لایه محافظ^۱ وجود دارد که دیفیوژن مولکولی و ادی‌ها از اهمیت یکسان برخوردار می‌باشند. چنانچه کمیت‌های بدون بعد u^+ و y^+ به صورت زیر تعریف گردند:

$$u^+ = \frac{u}{u^*} \quad (11)$$

$$\text{Where } u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (12)$$

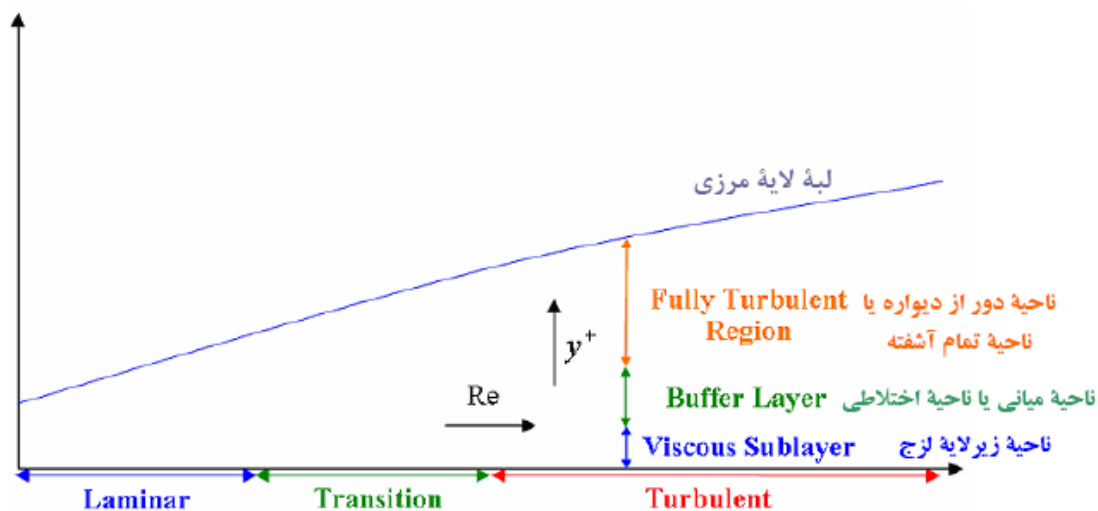
$$y^+ = \frac{\rho u^* y}{\mu} \quad (13)$$

در تعریف فوق، u^* یک سرعت مشخصه برای جریان آشفته و u^+ سرعت مشخصه بی‌بعد برای جریان آشفته می‌باشد. در جریانات آشفته و در راستای عمود بر دیواره با استفاده از سه محدوده جریانی به صورت زیر لایه لزوج، ناحیه گذرا و ناحیه تمام آشفته تعریف می‌گردد:

ا- ناحیه زیر لایه لزوج یا ناحیه مجاور دیواره با جریانی کاملاً آرام

ب- ناحیه میانی یا ناحیه ترکیبی با جریانی در حالت گذرا

ج- ناحیه دور از دیواره یا ناحیه قانون لگاریتمی با جریان تماماً آشفته

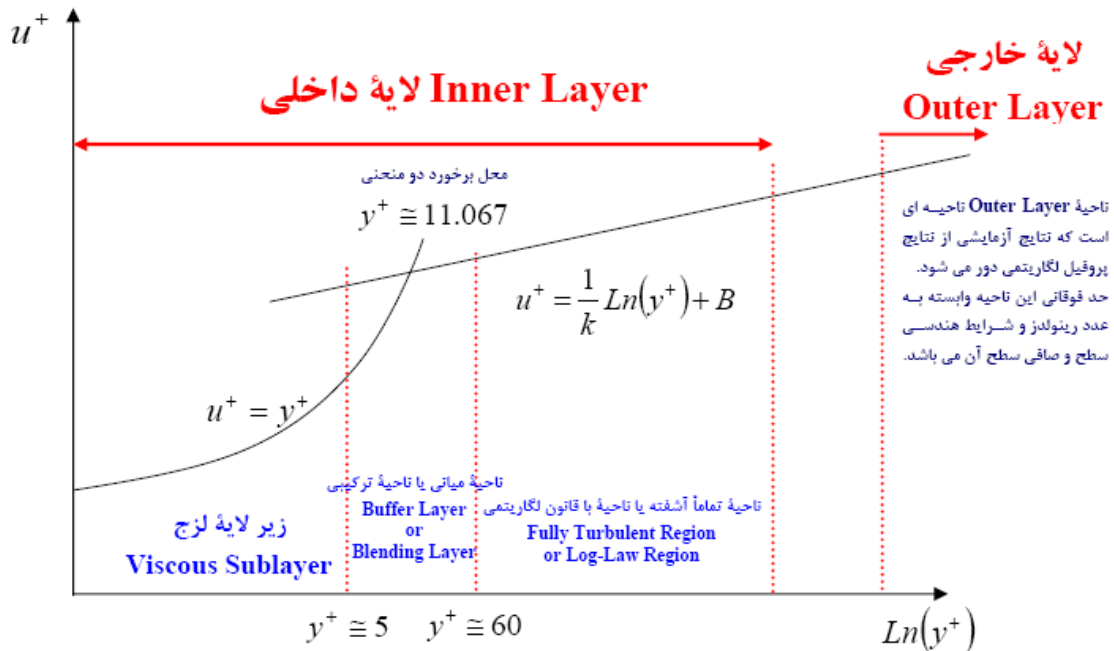


شکل (۲): پروفیل سرعت در یک جریان آشفته و لایه‌های مختلف جریان مجاور دیواره

پروفیل سرعت در لایه‌های مختلف یک جریان آشفته و در راستای عمود بر دیواره به صورت زیر نشان

¹ Buffer Layer

داده می‌شود. مقادیر و روابط ارائه شده در ذیل بعداً به تفصیل مورد بررسی قرار خواهند گرفت:



شکل (۳): لایه‌های مجاور دیواره در یک جریان آشفته

۳- مدل سازی جریان‌ات آشفته و مدل‌های آشفتگی

تاکنون صدها مدل توربولانسی ارائه شده‌اند که هر یک برای رژیم‌های خاص جریانی و حتی در ناحیه‌ای خاص از میدان جریان معتبر و دقیق می‌باشند. هدف نهائی تمام مدل‌های توربولانسی، محاسبه اندازه تنش رینولدز $-\rho \overline{u'_i u'_j}$ در نقاط مختلف جریان می‌باشد.

مدل‌های توربولانسی موجود را می‌توان از دو منظر نگریست:

الف) روابط اساسی حاکم بر Eddy-Viscosity¹

ب) مدل‌های Eddy Viscosity²

روابط اساسی حاکم بر Eddy-Viscosity از یک پارامتر منفرد که اصطلاحاً ویسکوزیته آشفته μ_t نامیده می‌شود، برای بیان رابطه بین تنش‌های رینولدز موجود در معادلات RANS و پروفیل‌های موجود در میدان جریان متوسط استفاده می‌کنند. از سوی دیگر مدل‌های Eddy-Viscosity نیز برای محاسبه μ_t معرفی شده در روابط اساسی Eddy-Viscosity استفاده می‌شود. در اینجا، سه رابطه به

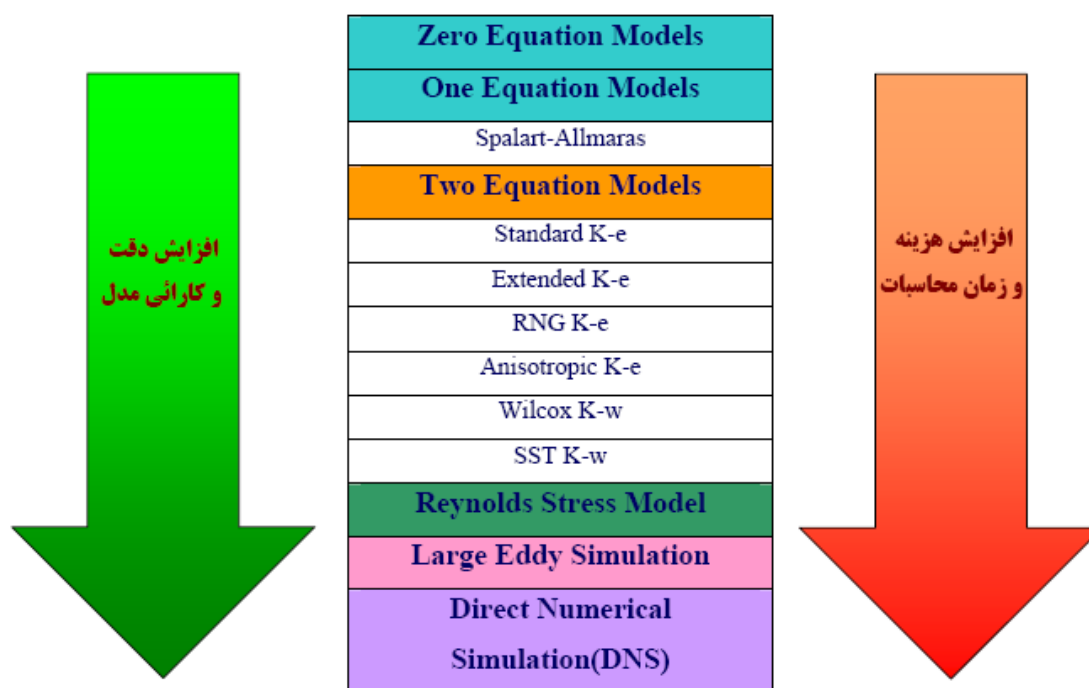
¹ Eddy-Viscosity Constitutive Relation

² Eddy-Viscosity Model

عنوان روابط اساسی و نیز ۹ مدل به عنوان مدل‌های جریان آشفته معرفی می‌شوند.

روابط اساسی	RANS Based Models				
	Eddy_viscosity Models			RSM	LES
	مدل‌های صفر معادله‌ای	مدل‌های یک معادله‌ای	مدل‌های دو معادله‌ای	Reynolds Stress Models	Large Eddy Simulation
- Boussinesq - Speziale - Launder	Automatic Mixing Length User-specified Mixing Length	Spalart-Allmaras	Standard $k - \epsilon$ Extended $k - \epsilon$ RNG $k - \epsilon$ Anisotropic $k - \epsilon$ Wilcox $k - \omega$ SST $k - \omega$		

می‌توان هر یک از ۳ عدد رابطه اساسی را با هر یک از ۶ عدد مدل دو معادله‌ای ترکیب نمود تا به ترکیبات جامعی برای مدل‌سازی جریانات آشفته دست یابیم. برای مقایسه انواع مدل‌ها با یکدیگر، استفاده از نمودار زیر، کمک شایانی خواهد نمود:



روابط اساسی حاکم بر Eddy-Viscosity:

همان‌طور که گفته شد، روابط اساسی حاکم بر Eddy-Viscosity از یک پارامتر منفرد که اصطلاحاً ویسکوزیته آشفته μ_t نامیده می‌شود، برای بیان رابطه بین تنش‌های رینولدز موجود در معادلات RANS و پروفیل‌های موجود در میدان جریان متوسط استفاده می‌کنند. ۳ عدد از این دسته روابط وجود دارد:

۱) Boussinesq

۲) Speziale

۳) Launder

رابطه Boussinesq رابطه پایه و مبنا در مفهوم Eddy-Viscosity است. روابط Launder و Speziale در حقیقت بسط رابطه Boussinesq برای پیش‌بینی رفتارهای غیرایزوتروپی جریان‌ات آشفته هستند.

رابطه اساسی Boussinesq Eddy-Viscosity:

رابطه بوزینسک بر پایه این اصل بنا نهاده شده است که مؤلفه‌های تنش‌های رینولدز متناسب با گرادیان‌های سرعت متوسط می‌باشند، یعنی:

$$-\rho \overline{u'_i u'_j} = 2\mu_t S_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (14)$$

که در آن، S_{ij} تانسور نرخ کرنش متوسط^۱ بوده و توسط رابطه $S_{ij} = \left(\frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2} \right)$ تعریف می‌شود.

لازم به یادآوری است که در بیان تانسوری $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ می‌باشد. مقادیر متوسط جریان و مشتقات

مربوط به آن از حل معادلات متوسط ناویر استوکس در داخل میدان جریان به دست می‌آید

¹ Mean Strain Rate Tensor

معادله ممنتوم در یک جریان آشفته

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} \right) = -P_{,i} + B_i + \left[\mu (u_{i,j} + u_{j,i}) - \overline{\rho u'_i u'_j} \right]_{,j}$$

استفاده از روابط Eddy-Viscosity برای تعیین تنش رینولدز نظیر

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} = 2\mu_t S_{ij} - \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij}$$

استفاده از مدل‌های Eddy-Viscosity نظیر

μ_t برای تعیین ویسکوزیته آشفته $k - \varepsilon, k - \omega, \dots$

مدل‌های Eddy-Viscosity:

هدف هر مدل Eddy-Viscosity، توصیف رابطه بین Eddy Viscosity μ_t و کمیت‌های قابل اندازه‌گیری فیزیکی جریان و یا کمیت‌های محاسبه شده میدان جریان است. به طور کلی این مدل‌ها را می‌توان به سه دسته تقسیم نمود:

۱. مدل‌های صفر معادله‌ای^۱

۲. مدل‌های یک معادله‌ای^۲

۳. مدل‌های دو معادله‌ای^۳

مدل‌های صفر معادله‌ای، تنها از روابط و معادلات جبری جهت توصیف رابطه بین μ_t و خواص محاسبه شده و یا قابل اندازه‌گیری استفاده می‌کنند. مدل‌های یک معادله‌ای از یک معادله انتقال PDE اضافی نیز در این بین استفاده می‌کنند، مدل‌های دو معادله‌ای شامل دو عدد PDE اضافی هستند.

واضح است که هیچ مدل آشفتگی وجود ندارد که برای تمامی مسائل مهندسی جوابگو باشد. انتخاب مدل از بین مدل‌های موجود بستگی به:

¹ Zero Equation Model

² One Equation Model

³ Two Equation Model

- الف) فیزیک جریانی که با آن در مسأله مورد نظر درگیر هستیم.
- ب) وجود یا عدم وجود همزمان چند رژیم متفاوت جریانی در کنار یکدیگر
- ج) میزان دقت مورد نیاز
- د) امکانات محاسباتی موجود (از قبیل RAM و یا CPU در دسترس)
- ه) میزان زمان مورد نیاز برای رسیدن به جوابی معقول دارد.

مدل‌های صفر معادله‌ای (مدل‌های طول اختلاطی):^۱

از نقطه نظر محاسباتی و خواص همگرایی، می‌توان انتظار داشت که در استفاده از مدل طول اختلاطی (یا مدل‌های صفر معادله‌ای) در نهایت رفتاری شبیه به رفتار جریان‌ات آرام را شاهد خواهیم بود. بالاخص چنانچه از شرایط مرزی مناسب استفاده شده باشد، حل عددی با استفاده از این مدل‌ها، با سرعت بالاتری همگرا شده و نتایج همگرا شده بهتری را در تعداد تکرار کمتر خواهد داد.

مدل‌های یک معادله‌ای Spalart-Allmaras:

در مدل‌های یک معادله‌ای، یکی از دو مقیاس مهم در جریان‌ات آشفته، یعنی از میان زمان مقیاس جریان‌ات آشفته و طول مقیاس جریان‌ات آشفته و یا ترکیبی از آن دو، با استفاده از یک معادله انتقالی به دست می‌آید. معمولاً این انرژی جنبشی آشفته، k است که برای آن از یک معادله انتقالی استفاده می‌شود.

مدل Spalart-Allmaras یک مدل تک معادله‌ای ساده بوده که یک معادله مدل شده انتقال را برای به دست آوردن μ_t حل می‌کند. مدل مزبور برای کاربردهای هوا-فضا ارائه شده است و همچنین نتایج خوبی برای لایه‌های مرزی که در معرض گرادیان فشار معکوس^۲ قرار دارند، ارائه داده است. همچنین این مدل، یک مدل عمومی برای کاربردهای توربومشین است.

^۱ Zero Equation Models (Mixing Length Models)

^۲ Adverse Pressure Gradient

در شکل اصلی خود، مدل Spalart-Allmaras مدلی مؤثر برای اعداد رینولدز پائین محسوب می‌گردد، یعنی استفاده مؤثر از این مدل تنها محدود به نواحی متأثر از لزجت در داخل لایه مرزی و نواحی مشابه (با عدد رینولدز پائین) می‌باشد. این مدل، بهترین گزینه برای رسیدن به حل‌های خام^۱ بر روی مش زمخت اولیه^۲ می‌باشد. (البته برای مواقعی که محاسبات دقیق میدان جریان آشفته خیلی ضروری نبوده و هدف کلی رسیدن به یک رفتار کلی و تقریبی از جریان آشفته است).

مدل‌های دو معادله‌ای:

مدل‌های دو معادله‌ای به عنوان زیربنای بسیاری از تحقیقات مربوط به مدل‌سازی جریان‌ات آشفته، بالاخص در سال‌های اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته‌اند. ساده‌ترین مدل‌های کامل آشفتگی (که در عین قابلیت‌های بالا، دارای معادلات نسبتاً ساده‌ای نیز می‌باشند)، مدل‌های دو معادله‌ای هستند که در آن‌ها، حل دو معادله انتقال جداگانه باعث تعیین شدن مستقلانه مقیاس سرعت آشفتگی^۳ و مقیاس طول آشفتگی^۴ می‌شوند.

نقطه آغاز تمام مدل‌های Eddy – Viscosity دو معادله‌ای مجازاً خطی، استفاده از تقریب بوزینسک و معادله انتقال برای انرژی جنبشی آشفتگی، k می‌باشد. انتخاب متغیر دوم دلخواه بوده و تا امروز پیشنهادات بسیاری برای این انتخاب ارائه شده است [۵۲]:

معنای فیزیکی	نماد	متغیر	سال ارائه	ارائه دهنده
فرکانس	ω	$\frac{\sqrt{k}}{l}$	۱۹۴۲	Kolmogorov
طول مقیاس	l	l	۱۹۵۱	Rotta
k ضربدر طول مقیاس	kl	kl	۱۹۶۸	Rotta

¹ Crude Simulation

² Coarse Mesh

³ Turbulent Velocity Scale

⁴ Turbulent Length Scale

نرخ اضمحلال لزج	ε	$\frac{k^{3/2}}{l}$	۱۹۶۸	Harlow & Nakayama
نوسانات ورتیسیتی	ω'	$\frac{k}{l^2}$	۱۹۶۹	Spalding
ادی ویسکوزیته	ν_t	$l\sqrt{k}$	۱۹۶۹	Nee & Kovaszny
زمان مقیاس	τ	$\frac{l}{\sqrt{k}}$	۱۹۹۲	Speziale

مدل استاندارد $k - \varepsilon$:

مدل $k - \varepsilon$ معروفترین مدل دو معادله‌ای می‌باشد. چرا که فهم آن آسان و استفاده از آن در برنامه نویسی ساده می‌باشد. در مدل‌های Eddy-Viscosity $k - \varepsilon$ ، میدان آشفته بر حسب دو متغیر بیان می‌شود:

الف) انرژی جنبشی جریان آشفته k ^۱

ب) نرخ اضمحلال ویسکوز انرژی جنبشی آشفته ε ^۲

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} \quad (15)$$

$$\varepsilon = \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \overline{u'_{i,j} u'_{i,j}} \quad (16)$$

در مدل استاندارد $k - \varepsilon$ ، مقادیر k و ε توسط معادلات نیمه تجربی^۳ زیر به دست می‌آیند:

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho u_j k_{,j} = \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} k_{,j} \right)_{,j} + G + B - \rho \varepsilon \quad (17)$$

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho u_j \varepsilon_{,j} = \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \varepsilon_{,j} \right)_{,j} + C_1 \frac{\varepsilon}{k} G + C_1 (1 - C_3) \frac{\varepsilon}{k} B - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (18)$$

که در آن C_1 و C_2 و C_3 ضرایب تجربی بوده و σ_k و σ_ε نیز به ترتیب اعداد پرانتل و اشمیت آشفته می‌باشند.

^۱ Turbulent Kinetic Energy (T.K.E.)

^۲ Viscous Dissipation Rate of Turbulent Kinetic Energy

^۳ Semi-Empirical

ترم‌های $C_1 \left(\frac{\varepsilon}{k}\right) G$ و $C_2 \rho \left(\frac{\varepsilon^2}{k}\right)$ در معادله (۵-۱۹) به ترتیب بیانگر فرآیندهای تولید برشی ε^1 و فرآیندهای اضمحلال ویسکوز ε می‌باشند. ترم $C_1 (1 - C_3) \left(\frac{\varepsilon}{k}\right) B$ بیانگر اثرات بویانسی می‌باشد.

مدل توسعه یافته $k - \varepsilon$:^۲

این مدل را می‌توان به همراه هر یک از سه رابطه اساسی یعنی Launder ، Speziale و یا Boussinesq استفاده نمود. مدل $k - \varepsilon$ توسعه یافته بحث شده در اینجا توسط Kim و Chen (دو تن از محققین جریان‌های آشفتگی) بیان شده است. استدلال و منطقی که در پشت این مدل نهفته است، این است که علاوه بر مقیاس زمانی آشفتگی، $\frac{k}{\varepsilon}$ ، مقیاس زمانی دیگری به صورت $\frac{\rho k}{G}$ نیز وجود دارد که به کمک آن می‌توان نرخ اضمحلال ویسکوز را به نرخ کرنش متوسط در جریان مرتبط ساخت. با این استدلال آن‌ها معادله نظیر ε در مدل استاندارد را به فرم ذیل تغییر دادند:

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho u_j \varepsilon_{,j} = \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \varepsilon_{,j} \right)_{,j} + C_1 \frac{\varepsilon}{k} G + C_1 (1 - C_3) \frac{\varepsilon}{k} B - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + C_4 \frac{G^2}{\rho k} \quad (19)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، معادله ε اصلاح شده Kim و Chen، شامل ضریب C_4 نیز هست. این دو نفر علاوه بر پیشنهاد برای مقدار C_4 ، دیگر مقادیر مدل استاندارد را مورد اصلاح و بازبینی قرار داده‌اند:

σ_k	σ_ε	C_1	C_2	C_4
۰/۷۵	۱/۱۵	۱/۱۵	۱/۹	۰/۲۵

مدل $k - \varepsilon$ RNG:

یاخوت و همکارانش^۳ گونه جدیدی از مدل $k - \varepsilon$ را ارائه نموده‌اند که مشخصات و ویژگی‌های عملکردی آن در مقایسه با مدل استاندارد بهینه شده است.

¹ Shear Generation Processes

² Extended k-ε Model

³ Yakhot, et al

مدل پیشنهادی آن‌ها بر مبنای تئوری Renormalized Group قرار داشته و از همین رو به آن RNG گفته می‌شود. مدل $k - \varepsilon$ RNG در شکل ظاهری خود، بسیار شبیه به دو مدل استاندارد و بسط یافته می‌باشد. درست همانند مدل بسط یافته $k - \varepsilon$ ، این مدل نیز از یک ترم اضافی در معادله ε خود بهره می‌برد. توجه داشته باشید که مقادیر ضرائب این مدل نسبت به مدل بسط یافته متفاوت می‌باشد. از این مدل نیز می‌توان در کنار سه رابطه اساسی Boussinesq ، Speziale و Launder استفاده نمود.

فرم کلی معادلات در مدل $k - \varepsilon$ RNG به صورت زیر می‌باشد:

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho u_j k_{,j} = \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} k_{,j} \right)_{,j} + G + B - \rho \varepsilon \quad (20)$$

$$- \rho u_j \varepsilon_{,j} = \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \varepsilon_{,j} \right)_{,j} + C_1 \frac{\varepsilon}{k} G + C_1 (1 - C_3) \frac{\varepsilon}{k} B - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} - \frac{C_\mu \eta^3 (1 - \eta/\eta_0)}{1 + \beta \eta^3} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (21)$$

$$\mu = \frac{Sk}{\varepsilon} \quad \text{Where } S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} = \sqrt{\frac{G}{\mu_t}}, \quad S_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (22)$$

می‌توان نشان داد که η تابعی از نسبت $\frac{\text{Generation of } k}{\text{Dissipation of } k}$ بوده و می‌توان آن را به صورت زیر بیان

نمود:

$$\eta = \sqrt{C_\mu^{-1} \frac{G}{\rho \varepsilon}} \quad (23)$$

مدل $k - \varepsilon$ غیر ایزوتروپیک:

مدل آشفته $k - \varepsilon$ غیر ایزوتروپیک، نسخه‌ای از مدل استاندارد است که شامل ترم‌هایی در معادله ε است که این ترم‌ها مربوط به ساختار غیر ایزوتروپیک میدان جریان آشفته می‌باشند. این ترم‌ها بر مبنای ترم‌های به کار رفته در مدل تنش رینولدز¹ ارائه شده‌اند. هدف این ترم‌های اضافی، بهبود قابلیت مدل در پیش بینی اثرات غیر ایزوتروپیک جریان است که نمی‌توان این اثرات را توسط

¹ RSM

مدل های دو معادله ای به خوبی مدل نمود. این اثرات در جریانات پیچیده و مشکل، نظیر Swirl، Strong Curvature و نیز جریانات دارای Force Body (مانند جابجائی آزاد و جریانات شدیداً چرخشی) و جریانات ثانویه¹ به چشم می خورد.

ساختار غیر ایزوتروپیک جریانات آشفته تنها به کمک یکی از دو معادله اساسی Launder و Speziale قابل پیش بینی است. مدل آشفته $k - \varepsilon$ غیر ایزوتروپیک را نمی توان در کنار رابطه Boussinesq استفاده نمود، چرا که این رابطه توانائی مدل نمودن ساختارهای غیر ایزوتروپیک جریانات آشفته را ندارد. فرم کلی معادلات $k - \varepsilon$ غیر ایزوتروپیک درست شبیه به مدل استاندارد $k - \varepsilon$ می باشد:

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho u_j k_{,j} = \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} k_{,j} \right)_{,j} + G + B - \rho \varepsilon \quad (24)$$

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho u_j \varepsilon_{,j} = \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \varepsilon_{,j} \right)_{,j} + C_1 \frac{\varepsilon}{k} G + C_1 (1 - C_3) \frac{\varepsilon}{k} B - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (25)$$

مدل ویلکوکس $k - \omega$:

حالت عمومی مدل های $k - \omega$ از فرکانس آشفتگی ω به جای نرخ اضمحلال لزج ε برای مشخص کردن آشفتگی استفاده می کند. چنین مدل هائی به طور واضحی به انواع مدل $k - \varepsilon$ نزدیک و مرتبط می باشند. ما در اینجا به بررسی نوع Wilcox مدل $k - \omega$ می پردازیم.

در مدل Wilcox $k - \omega$ ، ارتباط بین مقیاس آشفتگی طولی و سرعتی یعنی δ_t و u_t با k و فرکانس آشفتگی ω توسط روابط زیر داده شده اند:

$$\delta_t \propto \frac{\sqrt{k}}{\omega} \quad (26)$$

$$u_t \propto \sqrt{k} \quad (27)$$

همان طور که دیده می شود، تغییری در روابط اساسی و طول مقیاس ها و ... دیده نمی شود. فرکانس آشفتگی ω را می توان توسط عبارت $\varepsilon = \omega k$ به مقادیر k و ω مربوط ساخت. و ویسکوزیته آشفتگی μ_t نیز توسط رابطه زیر به دست می آید:

¹ Secondary Flows

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k}{\omega} \quad (28)$$

معادلات انتقال برای k و ω عبارتند از:

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho u_j k_{,j} = \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} k_{,j} \right)_{,j} + G + B - \rho \omega k \quad (29)$$

$$\rho \frac{\partial \omega}{\partial t} + \rho u_j \omega_{,j} = \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \omega_{,j} \right)_{,j} + C_1 \frac{\omega}{k} G + C_1 (1 - C_3) \frac{\omega}{k} B - C_2 \rho \omega^2 \quad (30)$$

مدل انتقال تنش برشی $k - \omega$ ^۱:

مدل $SST.k - \omega$ توسط منتر^۲ و به منظور آمیختن فرمول‌بندی دقیق و قدرتمند مدل $k - \omega$ در نواحی نزدیک دیواره با مدل $k - \varepsilon$ مستقل از جریان آزاد در نواحی دور از دیواره ارائه شده است. یعنی این مدل به طور همزمان، توانایی بالای مدل $k - \omega$ در نواحی با عدد رینولدز پائین و توانایی بالای مدل $k - \varepsilon$ در نواحی با عدد رینولدز بالا را در اختیار گرفته است. برای این ترکیب دو مدل، نیازمند آن هستیم که فرمول‌بندی مدل $k - \varepsilon$ را به شکل مدل $k - \omega$ در بیاوریم.

مدل $SST.k - \omega$ بسیار شبیه به مدل استاندارد $k - \omega$ است و لیکن شامل بهینه‌سازی‌های زیر نیز می‌باشد: (لازم به ذکر است که مدل استاندارد $k - \omega$ بر مبنای مدل Wilcox $k - \omega$ قرار دارد که حاوی اصلاحاتی در اثرات عدد رینولدز پائین، تراکم‌پذیری^۳ و پراکندگی جریان برشی^۴ می‌باشد). الف) مدل استاندارد $k - \omega$ و شکل تبدیل یافته مدل $k - \varepsilon$ هر دو در یک تابع آمیختگی^۵ ضرب شده و آنگاه دو مدل با یکدیگر جمع می‌شوند.

تابع آمیختگی طوری طراحی شده است که در نواحی نزدیک دیوار دارای مقدار یک (که باعث فعال شدن مدل $k - \omega$ در آن نواحی می‌شود) و در نواحی دور از دیوار دارای مقدار صفر (که باعث فعال شدن مدل $k - \varepsilon$ می‌شود) می‌باشد. توجه شود که اگر چه این روش می‌تواند قابلیت‌های هر دو مدل را افزایش قابل توجهی بدهد، لیکن به واسطه فرآیند سوئیچ شدن از یک مدل به مدل دیگر، این مدل

¹ Shear Stress Transport (SST) k- ω Model

² Menter

³ Compressibility

⁴ Shear Flow Spreading

⁵ Blending Function

اغلب با رفتارهای ناپایداری و یا همگرایی‌های ضعیفی مواجه می‌گردد.

(ب) مدل دارای یک Damped Cross Diffusion Derivative در معادله ω است.

(ج) تعریف ویسکوزیته آشفتگی μ_t به منظور به حساب آوردن اثرات انتقال تنش‌های برشی اصلی جریان آشفته مورد تغییر قرار گرفته است.

(د) ثوابت مدل نسبت به مدل استاندارد $k - \omega$ تغییر یافته است.

این خصوصیات باعث شده است که مدل $k - \omega$ SST برای دسته وسیعی از جریانات (همانند جریانات حاوی گرادیان فشار معکوس، ایرفویل‌ها و موج شوک گذرا^۱) نسبت به مدل استاندارد $k - \omega$ بسیار دقیق‌تر و مطمئن‌تر باشد.

مدل انتقال تنش‌های رینولدز^۲ یا مدل RSM:

پیش از این در مدل‌های آشفتگی دیده شد که با استفاده از رابطه اساسی Eddy-Viscosity می‌توان مؤلفه‌های تنش رینولدز را به گرادیان‌های سرعت میدان جریان متوسط مرتبط نمود. اما در مدل RSM برای محاسبه هر یک از ترم‌های تنش رینولدز از یک معادله انتقالی کمک گرفته می‌شود. چنانچه به تانسور تنش رینولدز برای یک مسأله سه بعدی توجه شود، تعداد تنش‌های رینولدز مستقلی که بایستی برای یک مسأله سه بعدی حل شود، ۶ عدد می‌باشد، بنابراین برای تعیین دقیق توزیع تنش‌های رینولدز در یک مسأله سه بعدی به ۶ معادله انتقالی نیاز می‌باشد. در حالی که در یک مسأله سه بعدی، چنانچه بخواهیم از مدلی مانند مدل دو معادله‌ای $k - \varepsilon$ استفاده نمائیم، در این صورت از بین ۶ تنش رینولدز مجهول مورد نظر تنها می‌توان مطمئن بود که تنها دو تنش به طور دقیق محاسبه و مابقی به صورت غیر دقیق محاسبه شده‌اند.

این مدل تحت عناوین دیگری همچون Second Order Closure و یا Second Moment Closure و یا Second Order Modeling نیز شناخته می‌شوند.

البته هنوز هم برای تعیین طول مقیاس^۳، هم در حالت دو بعدی و هم در حالت سه بعدی، علاوه بر

^۱ Transonic Shock Waves

^۲ Reynolds Stress Transport Model or RSTM

^۳ Length Scale

معادلات مذکور نیاز به حل یک معادله اضافی دیگر نیز می‌باشد. لذا مدل RSM از مدل‌های رایج Eddy-Viscosity پیچیده‌تر می‌باشد. این مدل، توصیف به مراتب دقیق‌تری از آشفتگی را ارائه داده و بر روی طیف بسیار وسیع و متنوعی از جریانات مهندسی معتبر می‌باشند. این مدل می‌تواند بسیاری از اثرات پیچیده جریانات در طبیعت و مهندسی را در بر گیرند، از آن جمله می‌توان به جریاناتی نظیر "جریانات دارای خطوط جریانی منحنی"^۱ و یا جریانات دارای چرخش^۲ و دوران^۳ جریانات جابجائی آزاد^۴ جریانات بویانت^۵ اشاره نمود که این مدل در مدل‌سازی آن‌ها از قابلیت خوبی برخوردار است. اغلب جریانات آشفته به شدت بد شکل^۶ و غیر ایزوتروپ^۷ می‌باشند، یعنی علاوه بر آنکه مقادیر تنش‌های اصلی $\overline{u'^2}, \overline{v'^2}, \overline{w'^2}$ مخالف صفر می‌باشند، مقادیر تک تک عناصر این تنش‌های اصلی آشفته با یکدیگر تفاوت قابل ملاحظه‌ای دارند. بنابراین استفاده از مدل‌های Eddy-Viscosity در جاهائی که با جریانات به شدت غیر ایزوتروپیک سروکار داریم، مانند "جریانات به شدت چرخشی"^۸ و "جریانات ثانویه ناشی از تنش"^۹ اصلاً توصیه نمی‌شود.

مزایای این مدل عبارتند از:

۱. در مقایسه با مدل‌های صفر، یک و دو معادله‌ای، به فیزیک آشفتگی بسیار نزدیک‌تر می‌باشد.
۲. ترم‌های Advection و Production (و یا به عبارت دیگر ترم‌های Energy-in) ترم‌هایی صریح بوده و نیاز به مدل‌سازی ندارند.

معایب این مدل عبارتند از:

۱. این مدل بسیار پیچیده بوده و ترم‌های بسیار مهم آن (یعنی ترم‌های توزیع مجدد و اضمحلال لزج) نیازمند مدل‌سازی می‌باشند.
۲. مدل‌ها از لحاظ هزینه محاسباتی بسیار هزینه بر می‌باشند. در مدل‌های RANS وجود کمیت ویسکوزیته آشفته μ_T همانند یک عامل میراکننده اغتشاشات جریانی، باعث میرائی و در

¹ Streamline Curvature Flows

² Swirl Flows

³ Rotational Flows

⁴ Free Convection Flows

⁵ Buoyant Flows

⁶ Highly Skewed

⁷ Anisotropic

⁸ Highly Swirling Flows

⁹ Stress Driven Secondary Flows

نهایت حذف اغتشاشات و ناپایداری‌های عددی مربوطه می‌گردد. بنابراین با حذف نقش این کمیت در مدل RSM می‌توان انتظار داشت که ناپایداری‌های عددی به‌طور ناخواسته رشد نموده و همگرایی مسأله را با مشکل جدی مواجه سازند.