International Journal of Industrial Engineering & Production Management (2016)
September 2016, Volume 27, Number 2
pp. 129-141

http://IJIEPM.iust.ac.ir/

A MULTI OBJECTIVE PARTICLE SWARM ALGORITHM FOR SOLVING PROJECT SELECTION PROBLEM UNDER UNCERTAINTY

Hashem Omrani*, Farzane Adabi & Narges Adabi

Hashem Omrani, *Assistance professor Department of Industrial Engineering, Urmia University of Technology*
Farzane Adabi, *MSc Student Department of Industrial Engineering, Urmia University of Technology*
Narges Adabi, *MSc Department of Industrial Design, Tabriz Islamic Art University*

Keywords

Project selection,
Robust optimization,
Uncertain situation,
MOPSO

ABSTRACT

This paper proposes a linear model for multi-objective project selection problem. The problem supposed to encounter with constraints and time segmentations assumed not to be equal in numbers in various projects. The uncertainty condition and risk are added to the problem by using the robust optimization technique. Since this problem is classified as a NP-hard problem, to solve it, a multi objective particle swarm algorithm (MOPSO) is applied. To illustrate the performance of the proposed algorithm, a numerical example is solved by using both exact and proposed MOPSO algorithm. The results show that the proposed algorithm produces a solution close to the exact method.

نشـــریه بین المللـــی مهنـــدسی صنـــایع و مدیـــریت تولیـــد
شمـــاره ۲، جلـــد ۲۷، تابستان ۱۳۹۵
صفحـــــه ۱۴۱-۱۳۰
نشریه بین المللی مهندسی صنایع و مدیریت تولید
دانشگاه علم و صنعت ایران
ISSN: 2008-4870
http://IJIEPM.iust.ac.ir/

ارائه الگوریتم چند هدفه تجمع ذرات برای انتخاب پروژه در شرایط عدم قطعیت

هاشم عمرانی*، فرزانه ادبی و نرگس ادبی

کلمات کلیدی

انتخاب پروژه،
بهینه سازی استوار،
عدم قطعیت،
بهینه‌سازی چند هدفه
تجمع ذرات

چکیده:

در این مقاله به ارائه یک مدل خطی برای مساله انتخاب پروژه با چند تابع هدف پرداخته شده است. مساله انتخاب پروژه با فرض محدودیتها و دوره‌های زمانی یکسان و عدم تساوی تعداد دوره‌ها در پروژه‌های مختلف، مطرح شده است. شرایط عدم قطعیت و میزان ریسک با استفاده از تکنیک بهینه‌سازی استوار به مساله اضافه شده است. با توجه به اینکه این مساله در رده‌بندی مسائل NP-hard قرار می‌گیرد، برای حل آن از الگوریتم فراابتکاری بهینه‌سازی چند هدفه تجمع ذرات (MOPSO) استفاده شده است. برای بررسی عملکرد الگوریتم پیشنهادی، یک مثال عددی در اندازه کوچک با استفاده از دو روش دقیق و بهینه‌سازی چند هدفه تجمع ذرات حل شده است. مقایسه‌ی جواب حاصل از این دو روش نشان می‌دهد که الگوریتم بهینه‌سازی چند هدفه تجمع ذرات پیشنهادی جوابهای نزدیک به رویکرد دقیق ارائه می‌دهد.

۱. مقدمه

مسئله انتخاب پروژه (PSP) درموارد قطعی، توسط محققان متعددی مورد بررسی قرار گرفته است. در موارد مذکور به دلیل مشخص بودن تمام پارامترهای تصمیم‌گیری در انتخاب پروژه، راه‌حل‌های قابل اعتمادی برای آنها ارائه شده است. کاربردهای متعدد مسئله انتخاب پروژه در زمینه تحقیق و توسعه [۱]، فن‌آوری اطلاعات [۲] و بودجه‌بندی سرمایه [۳] اهمیت پرداختن به این موضوع را بیشتر نمایان می‌سازد.

دریکی از اولین مطالعات انجام شده در این زمینه، مسئله برنامه‌ریزی چند پروژه توسط برنامه ریزی عدد صحیح [۴] حل شده است. لوا و همکارانش نیز، مسئله برنامه‌ریزی چند پروژه را با اهداف مختلف در سطوح متفاوت،مطرح کرده‌اند [۵]. گونکالوز و همکارانش از روش الگوریتم ژنتیک (GA) برای حل مسئله برنامه‌ریزی چند پروژه‌ای استفاده کرده‌اند که در آن تنها منابع تجدیدپذیر در نظر گرفته‌اند [۶]. میتال و کاندا از رویکرد ابتکاری دو مرحله‌ای برای برنامه‌ریزی چند پروژه‌ای استفاده نموده‌اند. آنها در مطالعه خود،فقط منابع تجدیدپذیر در نظر گرفته‌اند [۷].

مسئله انتخاب پروژه به عنوان‌یک مسئله چند هدفه توسط [۹-۸] تعریف شده است که در آن تصمیم‌گیرنده می‌تواند به طور همزمان چندین هدف شخصی و احتمالا متضاد خود را برآورده سازد (به عنوان مثال حداقل زمان ورود به بازار و به حداکثر رساندن بازده اقتصادی).

در پژوهش حاضر، ضمن توسعه مدل [۹]، دوره‌هایی با بازه زمانی‌یکسان تعریف شده است با این تفاوت که طول مدت زمان اجرای تمام پروژه‌ها برابر نبوده و می‌تواند تعداد دوره‌های متفاوتی داشته باشد. به علاوه برنامه‌ریزی منابع نیز به مدل مربوطه افزوده شده است.

منابع در یک مساله کنترل پروژه می‌توانند تجدیدپذیر، تجدیدناپذیر یا محدود باشند. مسئله برنامه‌ریزی پروژه با منابع چند حالته محدود به خوبی مورد مطالعه قرار گرفته است و محققان مختلف به حل مسئله با روش دقیق [۱۰] و روش‌های مبتنی بر الگوریتم‌های فرابتکاری [۱۴-۱۱] پرداخته‌اند. بررسی‌های اجمالی را می‌توان در [۱۵] یافت. در این مطالعات، چندین مدل ریاضی برای حل مسئله برنامه‌ریزی پروژه

تاریخ وصول: ۹۲/۰۶/۲۶
تاریخ تصویب: ۹۳/۰۴/۲۴

فرزانه ادبی، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی ارومیه
نرگس ادبی، گروه طراحی صنعتی دانشگاه هنر اسلامی تبریز،
*نویسنده مسئول مقاله: **هاشم عمرانی**، گروه مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی ارومیه، h.omrani@uut.ac.ir

با منابع چند حالته محدود پیشنهاد شده است. به عنوان مثال در [۱۶].

زندگی واقعی مملو از عدم قطعیت‌ها است که تدبیر ایجاد و استفاده‌از مدل‌های پیچیده‌تر را در تصمیم‌گیری اجتناب ناپذیر می‌سازد. در مرحله برنامه‌ریزی انتخاب پروژه، برآورد و پیش‌بینی هزینه‌ها، منابع انسانی و مادی اغلب دشوار است و همین مسئله باعث شده استکه مدیران اغلب بدون کسب دانش کافی از پارامترهای مختلف مسئله، تصمیم‌گیری کنند [۱۷].

برخی از محققان عدم قطعیت را در مسئله انتخاب پروژه با استفاده ازیک روش جامع در نظر گرفته‌اند [۱۷]. لی عدم قطعیت بودجه را در تصمیم‌گیری سرمایه‌گذاری بزرگ‌راه با استفاده ازیک مدل بهینه‌سازی تصادفی پیاده سازی کرده‌است [۱۸]. همچنین در مطالعه دیگری، لی و مدنو روشی مبتنی بر عدم قطعیت در تجزیه و تحلیل هزینه و سود را در زمینه پروژه بزرگراه و ارزیابی پروژه معرفی کرده‌اند [۱۹]. آنها نشان دادند که تفاوت‌های قابل توجهی با و بدون در نظر گرفتن عدم قطعیت وجود دارد. آنها مواردی همچون عدم قطعیت در بودجه در دسترس، شانس موفقیت و تخصیص کارآمد اعضای تیم پروژه در انتخاب پروژه‌های نوسازی شهری را در مدل‌سازی وارد نموده‌اند [۲۰]. یکی از مشکلات مسائل انتخاب پروژه این ست که تمام پارامترهای مساله در شرایط عدم قطعیت قرار دارند لذا در این مقاله سعی شده است تا مدل جامعی از مساله انتخاب پروژه مطرح شده و عدم قطعیت در تمامی پارامترهای آن اعمال شود.

انواع مختلفی از تکنیک‌ها برای مدلسازی عدم قطعیت معرفی شده‌اند؛ به عنوان مثال روش‌های بهینه سازی استوار Mulvey [۲۱] وP-Robust [۲۲] برای حالت وجود سناریوهایی با احتمال وقوع معلوم تعریف شده‌اند. همچنین روش‌های بهینه سازی استوار Soyster [۲۳]، Ben-Tal & Nemirovski [۲۴] و Bertsimas & Sim [۲۵] برای شرایط عدم قطعیت کامل معرفی شده‌اند.

تکنیک بهینه سازی استوار ارائه شده توسط ملوی [۲۱]یکی از پرکاربردترین الگوریتم‌ها در زمینه عدم قطعیت می‌باشد. اخیراً محققان در مسائلی همچون انتخاب تامین کنندگان [۲۶]، برنامه‌ریزی تولید [۲۷] و زنجیره تامین [۳۰-۲۸] از این تکنیک استفاده کرده‌اند. در این مقاله نیزعدم قطعیت و ریسک مربوط به آن با استفاده از این تکنیک وارد مسئله می‌شود. در ادامه به تفصیل در مورد آن بحث شده است.

روش‌های حل متعددی برای مساله انتخاب پروژه ارائه شده است. به عنوان مثال، [۳۱] یک بهینه‌سازی کلونی مورچگان چند هدفه را پیشنهاد می‌دهد و این بهینه‌سازی را به عنوان‌یک روش فراابتکاری مخصوص و موثر برای حل مسئله انتخاب پروژه معرفی می‌کند. وی در مقاله خود، مدل معرفی شده توسط [۳۲] را بکارگرفته است. بدری و همکارانش باترکیب برنامه‌ریزی ۱-۰ و برنامه‌ریزی آرمانی، برنامه‌ریزی انتخاب پروژه را در موسسات خدمات سلامت مطرح کرده‌اند [۳۳]. ربانی و همکاران مدل خطی ۱-۰ و برنامه‌ریزی آرمانی چند دوره‌ای را برای انتخاب پروژه با تجزیه و تحلیل حساسیت در مقادیر تابع هدف ارائه نموده‌اند [۳۴]. دی به ارزیابی و انتخاب پروژه‌های در حال توسعه‌ی یک سیستم پشتیبانی تصمیم‌گیری پرداخته است [۳۵]. گابریل و همکارانش مدل انتخاب پروژه چند هدفه منحصر به فردی را با توزیع احتمالات برای توصیف هزینه‌ها پیشنهاد کردند و شبیه سازی مونت کارلو و AHP را با هم ترکیب نمودند [۳۶]. کارلسون و همکارانش‌یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط فازی را برای مسئله انتخاب پروژه ارائه دادند [۳۷]. هوانگ عدم قطعیت فازی تصادفی در انتخاب پروژه‌ها را با استفاده از یکپارچه‌سازی الگوریتم ژنتیک با شبیه‌سازی فازی تصادفی محاسبه نموده‌است [۳۸].

در این مقاله مدل قطعی شامل متغیرهای ۰ و ۱ است که در فرایند استوارسازی متغیرهای عدد صحیح نیز به آن اضافه می‌شود. از این رو مساله در رده‌ی مسائل NP-Hard قرار می‌گیرد. بنابراین در مسئله باAندازه بزرگ حل دقیق دیگر کارا نبوده و نیازمند حل فراابتکاری خواهیم بود که در این مقاله از الگوریتم MOPSO برای حل مدل استفاده می‌شود. در ادامه‌ی مقاله در بخش دوم،بهینه‌سازی استوار و مراحل پیاده‌سازی آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. بخش‌های سوم و چهارم به روش حل‌یعنی بهینه سازی ازدحام ذرات و بهینه سازی چند هدفه ازدحام ذرات می‌پردازد. مدل قطعی انتخاب پروژه در بخش پنجم و استوار شده مدل قطعی در بخش ششم و همچنین مدل خطی پیشنهادی در بخش هفتم ارائه شده‌اند. بخش هشتم نمونه مثال حل شده و نتایج آن را بیان می‌دارد و در بخش نهایی جمع‌بندی و نتیجه‌گیری آمده است.

۲. بهینه‌سازی استوار

در چهار دهه اخیر، بسیاری از مطالعات روش‌هایی برای وارد نمودن ریسک در مدل‌های تصادفی ارائه نموده‌اند. هویلند و والاس مدلی نیمه-واریانس پیشنهاد کرده‌اند که در آن ریسک می‌تواند در برنامه‌ریزی خطی تصادفی،پیاده شود [۳۹]. مدل بهینه‌ی استوار، نوع خاصی از برنامه‌ریزی غیر خطی غیر قطعی است که در آن عملکرد ریسک‌گریزی می‌تواند با ویژگی‌های اهداف ترکیب شود [۴۰].

بهینه‌سازی استوار که توسط ملوی ارائه شد، این قابلیت را دارد که ریسک‌گریزی مطلوب تصمیم‌گیرنده را مدلسازی کند [۴۲]. راه‌حلی استوار است که با ایجاد تغییرات کوچک در داده‌های اولیه آن، جواب مدل تغییر نکند. بهینه‌سازی استوار،یک تابع هدف را با داده‌های ورودی مبتنی بر پایه سناریویی ادغام می‌نماید و شامل دو قید مجزا می‌باشد: قید ساختاری و قید کنترلی. قیود ساختاری با استفاده از برنامه‌ریزی خطی فرموله می‌شوند و داده‌های ورودی آن هیچ‌گونه اختلالی ندارند. در حالی که قیود کنترلی، به عنوان قیودی کمکی شمرده می‌شوند که با داده‌های غیر قطعی درگیر هستند. علاوه بر این‌ها، دو دسته از متغیرها- طراحی و کنترل -

تعریف می‌شوند. در ذیل، چهارچوب بهینه‌سازی استوار به طور مختصر تشریح شده است.

فرض کنید $x \in R^{n_1}$ بردار متغیر طراحی است، و $y \in R^{n_2}$ بردار متغیر کنترلی است. فرمول بهینه‌سازی استوار شده عبارت است از:

$$min\, z = c^T x + d^T y \quad (۱)$$

$$s.t.:\ Ax = b \quad (۲)$$

$$Bx + Cy = e \quad (۳)$$

$$x, y \ge 0 \quad (۴)$$

عبارت (۲) قید ساختاری است که ضرایب آن ثابت و قطعی و عبارت (۳) قید کنترلی است که ضرایب آن غیر قطعی هستند. عبارت (۴) بردارهای غیرمنفی را تضمین می‌کند. مسائلی که با بهینه‌سازی استوار فرموله می‌شوند، شامل مجموعه‌ای از سناریوهای $s \in \Omega$ هستند که $\Omega = \{1,2,,3, \dots, S\}$ یک زیر مجموعه از سناریوها است و $\{d_s, B_s, C_s, e_s\}$ ضرایب مرتبط با قیود کنترلی هستند. احتمال ثابت p_s احتمال وقوع سناریوی s را نشان می‌دهد و $\sum_{s=1}^{S} p_s = 1$. هدف بهینه‌سازی استوار به طور کلی پیدا کردن جوابی است که تحت عدم قطعیت پارامترها به خوبی عمل کند و انحراف زیادی از میانگین عملکرد مدل نداشته باشد.

ملوی دو نوع استواری معرفی میکند [۴۲]:

- استوار بودن جواب: یک جواب بهینه برای مدل نسبت به بهینگی استوار است اگر نسبت به وقوع هر سناریو، نزدیک به بهینه باقی بماند. به این حالت استواری جواب گفته می‌شود.
- استوار بودن مدل: یک جواب نسبت به موجه بودن استوار است اگر نسبت به وقوع هر سناریو، موجه باقی بماند. به این حالت استوار بودن مدل گفته می‌شود.

در مسأله بهینه سازی استوار، ابتدا متغیرهای کنترلی y_s برای هر سناریوی $s \in \Omega$ و بردار خطای ξ_s که میزان امکان ناپذیری قیود کنترلی را تحت سناریوی s اندازه می‌گیرد، تعریف می‌شوند. سپس، یک مدل بهینه‌سازی استوار براساس برنامه‌ریزی ریاضی عبارات ۱-۴ مذکور در قسمت قبلی ایجاد می‌شود:

$$\min \quad \sigma(x, y_1, y_2, \dots, y_s) + \rho\omega(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_s) \quad (۵)$$

$$s.t.:\ Ax = b \quad (۶)$$

$$B_s x + C_s y_s = e_s \ \ \forall\, s \in \Omega \quad (۷)$$

$$x \ge 0, \quad y_s \ge 0 \ \ \forall\, s \in \Omega \quad (۸)$$

با توجه به عدم قطعیت موجو در پارامترهای مدل، مقدار تابع هدف در عبارت (۱)یعنی $\xi = c^T x + d^T y$ به روش تصادفی انتخاب می‌شود. فرض می‌شود$\xi_s = c^T x + d_s^T y_s$با احتمال وقوع p_s تحت سناریوی $s \in \Omega$ رخ خواهد داد. در فرمول برنامه‌ریزی خطی تصادفی،یک مقدار میانگین $\sigma(0) = \sum_{s\in\Omega} p_s \xi_s$ مورد استفاده قرارمی‌گیرد. مقدار $\rho(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_s)$ در تابع هدف، وابسته بهیک مقدار جریمه مربوط به نقض نشدن محدودیتهاست.تبادل بین استواری جواب و استواری مدل توسط فرایند تصمیم‌گیری چند معیاره و با استفاده وزن‌دهی ω بدست آید. به طور مثال اگر $\omega = 0$ باشد تصمیم گیر فقط به تابع هدف توجه کرده است و هدف دستیابی به جوابی بهینه بدون توجه به نقض محدودیتهاست. زمانیکهω به اندازه کافی بزرگ باشد، تصمیم گیر به نقض نشدن محدودیتها نیز توجه می‌نماید. در خصوص انتخاب مناسب $\sigma(0)$ و $\rho(0)$ می‌توان به [۴۱]، [۴۲] و [۲۱] مراجعه نمود. شرط $\sigma(x, y_1, y_2, \dots, y_s)$ که توسط [۴۱]پیشنهاد شده است، مقدار میانگین $\sigma(0)$ به اضافه پارامتر ریسک λ است.

$$\sigma(x, y_1, y_2, \dots, y_s) = \sum_{s\in S} p_s \xi_s + \lambda \sum_{s\in S} p_s (\xi_s - \sum_{s'\in S} p_{s'} \xi_{s'})^2 \quad (۹)$$

هر چه λ افزایش پیدا می‌کند، راه حل حساسیت کمتری نسبت به تغییرات داده‌ها در تمام سناریوها خواهد داشت[۲۱]. عبارت(۹) حاوی شرط پیچیده $\sum_{s\in S} p_s (\xi_s - \sum_{s'\in S} p_{s'} \xi_{s'})^2$ می‌باشد. زیرا سبب ایجاد عبارات درجه دومی در فرمول می‌شود. یو و لی در[۴۲] اشاره کردند که برای کمینه کردن تابع هدف عبارت (۹) مدل بهینه‌سازی استوار نیازمند محاسبات بزرگی است. آنها فرمولی برای $\sigma(x, y_1, y_2, \dots, y_s)$ ارائه نمودند که به صورت زیر است:

$$\sigma(x, y_1, y_2, \dots, y_s) = \sum_{s\in S} p_s \xi_s + \lambda \sum_{s\in S} p_s |\xi_s - \sum_{s'\in S} p_{s'} \xi_{s'}| \quad (۱۰)$$

یو و لی بیان کردند که رویکرد خطی مستقیم عبارت (۱۰) به دلیل متغیرهای انحرافی غیر منفی زیاد و قیودی که تعریف شده‌اند، زیاد کارا نیست. همچنین برای مینیمم کردن اثر $\sigma(x, y_1, y_2, \dots, y_s)$در عبارت (۱۰)از یک روش اثربخش استفاده نمودند[۴۲]. چهار چوب مدل [۴۲] برای مینیمم کردن تابع هدف در عبارت (۱۱) آورده شده است:

$$min\, z = \sum_{s\in S} p_s \xi_s + \lambda \sum_{s\in S} p_s [(\xi_s - \sum_{s'\in S} p_{s'} \xi_{s'}) + 2\theta_s]. \quad (۱۱)$$

$$s.t.:\ \ \xi_s - \sum_{s'\in S} p_{s'} \xi_{s'} + \theta_s \ge 0 \quad (۱۲)$$

$$\theta_s \ge 0 \quad (۱۳)$$

در عبارت فوق اگر $\xi_s - \sum_{s'\in S} p_{s'} \xi_{s'} \ge 0$ باشد آنگاه $\theta_s = 0$ است و مقدار تابع هدف $z = \sum_{s\in S} p_s \xi_s + \lambda \sum_{s\in S} p_s [(\xi_s - \sum_{s'\in S} p_{s'} \xi_{s'})]$ خواهد بود از طرف دیگر اگر $\xi_s - \sum_{s'\in S} p_{s'} \xi_{s'} < 0$ باشد آنگاه $\theta_s = \sum_{s'\in S} p_{s'} \xi_{s'} - \xi_s$ و $z = \sum_{s\in S} p_s \xi_s + \lambda \sum_{s\in S} p_s [(\sum_{s'\in S} p_{s'} \xi_{s'} - \xi_s)]$ خواهد

بود. روند مذکور تغییر تابع هدف از درجه دوم به قدر مطلق و تغییر آن به حالت خطی با اضافه کردن‌یک محدودیت را نشان می‌دهد که جواب همگی آنهایکسان است.

۳. بهینه‌سازی ازدحام ذرات (PSO)

۳-۱. بهینه سازی ازدحام ذرات پیوسته

بهینه سازی ازدحام ذرات (PSO) یک الگوریتم مبتنی بر جمعیت است که برای اولین بار توسط کندی و ابرهارت ارائه شد [۴۳]. این روش با تجزیه و تحلیل رفتار طبیعی پرندگان ویا ماهی‌ها برای پیدا کردن غذا بدست آمده است. آنها در تلاش بودند تا با بهره گیری از مدل‌های اجتماعی و روابط موجود اجتماعی نوعی هوش محاسباتی پدید آورند که به توانایی‌های فردی ویژه ای نیازمند نباشد. این دو محقق بیشتر بروی مدلهایی که توسط زیست شناس فرانک هپنر ایجاد شده بود تاکید کردند. با توجه به مدل هپنر ممکن است پرندگان در زمان مشخصی انگیزه برای فرود را بالاتر از انگیزه برای در میان گروه ماندن ببینند و در این هنگام، فرود می آیند. در اصل، از آنجایی که این روش نوعی از تکنیک‌های هوش ازدحامی است، هریک از راه حل‌های موجه به عنوان یک ذره تلقی می‌شود. هر ذره دارای ویژگی‌های موقعیتی، سرعت وجهت حرکت خاصی (مانند مگس‌ها) است و ازطریق فضای جستجو با توجه به بهترین موقعیت گذشته که تجربه کرده است (pbest) وب هترین موقعیت که دیگر اعضای جمع تجربه کرده‌اند (gbest) جواب جدید بدست می‌آید. این رفتار شبیه عملکرد مردم درتصمیم‌گیری است جایی که آنها بهترین تجربه پیشین خود و بهترین تجربه سایرین را مدنظر قرار می‌دهند [۴۴].

هان هونگ ژو با استفاده از الگوریتم PSO و ژنتیک برای حل مدل مارکویتز نشان داد که مدل PSO کارایی محاسباتی بالاتری دارد [۴۵]. همچنین ربانی و همکارانش در مقاله خود به مقایسه‌یMOPSO و NSGA2 پرداختند و نشان دادند که MOPSO سرعت عملکرد و همگرایی بیشتری برای آن مسأله را داراست [۹].

الگوریتم PSO بر پایه دو رابطه (۱۴) و (۱۵) می‌باشد که به ترتیب به محاسبه میزان سرعت و موقعیت ذرهiام را در لحظه $(t+1)$ می‌پردازند.

$$v_i(t+1) = w * v_i(t) + c_1 r_1 \big(xp_i(t) - x_i(t)\big) + c_2 r_2 \big(xg(t) - x_i(t)\big) \quad (۱۴)$$

$$x_i(t+1) = x_i(t) + v_i(t+1) \quad (۱۵)$$

در روابط فوق $x_i(t)$ بیانگر موقعیت ذرهi ام را در لحظه tام بوده و $v_i(t)$ نشانگر سرعت ذره iام در لحظه tام است. همچنین پارامترهایr_1و r_2 متغیر تصادفی از تابع‌یکنواخت بین ۰ و ۱ pbest و gbest هستند. c_1 و c_2 بیانگر ضریب شتاب pbest و gbest بوده وهمچنین w ضریب اینرسی است.

۳-۲. بهینه‌سازی ازدحام ذرات گسسته

در ابتدا PSO برای حل مسائل پیوسته توسعه‌یافته بود، ولی اخیرا نسخه باینری گسسته آن نیز به منظور حل کارآمدتر و قابل اجرا در مسائل واقعی ارائه شده است [۴۶]. تفاوت PSO گسسته با پیوسته در این است که در فضای گسسته اولاً ذرات به داشتن متغیرهای صفر و یک (باینری) محدود می‌شوند و ثانیاً سرعت می‌تواندیک ذره را از صفر به‌یک تغییر دهد.

۴. بهینه‌سازی چند هدفه ازدحام ذرات (MOPSO)

برای بسیاری از مسائل و مشکلات دنیای واقعی، در نظر گرفتن تمام جوانب در شرایط هدف واحدبسیار دشوار است. لذا به نظر می‌رسد استفاده ازیک فرمچند هدفه برای مدل‌سازی با توجه به معیارهای متضاد، ایده بسیار بهتری خواهد بود [۴۷]. برای گسترش الگوریتم‌های تک هدفه به شکل چند هدفه، روش اصلی حل، تغییریافته است. کوئلو برای اولین بار رویکرد حل MOPSO را ارائه نموده است که در آن، الگوریتم PSO از آرشیو خارجی ذرات استفاده می‌کند. این آرشیو بعداً توسط ذرات دیگر برای هدایت روند جستجو مورد استفاده قرار می‌گیرد[۴۸]. نسخه چند هدفه الگوریتمPSO در [۴۹] توسعه داده شده و در مسائل کاربردی مورد استفاده قرار گرفته است. روش‌ها و معیارهای مختلفی برای انتخاب رهبران وکنترل اندازه آرشیو خارجی در روش‌های تکاملی چند هدفه و به خصوص الگوریتم MOPSO معرفی شده‌اند [۵۰- ۴۹]. آقای کوئلو در مرجع [۵۰] جهش را نیز به MOPSO اضافه کرده است.

۴-۱. الگوریتم MOPSO

۱. ایجاد جمعیت اولیه
۲. جدا کردن اعضای نامغلوب جمعیت و ذخیره کردن آن در مخزن
۳. جدول بندی فضای هدف کشف شده (بدین معنی که با توجه به حداقل و حداکثر میزان توابع هدف بدست آمده هر یک از این بازه‌ها را برحسب نیاز به ۵ الی ۱۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم.)
۴. انتخاب یک رهبر از میان مخزن برای هر ذره و حرکت آن
۵. به روزرسانی بهترین خاطره هریک از ذرات
۶. اعضای نامغلوب جمعیت فعلی به مخزن اضافه می‌شود
۷. اعضای مغلوب مخزن حذف می‌شود
۸. به دلیل کمبود حافظه در مخزن باید تعداد آنها را کم کنیم. اگر تعداد اعضای مخزن بیش از ظرفیت تعیین شده باشد اعضای اضافی را حذف می‌کنیم (گاهی در این مرحله دوباره جدول بندی می‌شود. علت اصلی این گام فرض حافظه محدود برای مخزن می‌باشد و این زمانی رخ می‌دهد که تعداد جواب‌های پارتویی زیاد باشد و بخواهیم برای کاهش سردرگمی تصمیم‌گیرنده تنها تعداد مشخصی از جواب‌های پارتویی را تولید نماییم.)

۹. در صورتی که شرایط خاتمه محقق نشده‌اند به گام ۳ باز گردید و در غیر اینصورت پایان.

در این مقاله برای پیاده سازی گام ۴ و ۸ از روش Boltzman استفاده شده است. بدین ترتیب که در گام ۴ احتمال انتخاب ذره به عنوان رهبر با تعداد ذرات در جدول خود رابطه عکس دارد. زیرا الگوریتم سعی دارد فضاهای بیشتری را جستجو کند. همچنین در گام ۸ احتمال حذف ذره ای که در آن تعداد بیشتری جواب پارتویی موجود است بیشتر خواهد بود.

۵. مدل قطعی انتخاب پروژه

پارامترها:

b_{it}	سود حاصل از اجرای پروژه i ام در دوره t ام	
b'_{ijt}	سود حاصل از اجرای همزمان پروژه i ام و j ام در دوره tام	
C_{it}	هزینه راه‌اندازی پروژه i ام در دوره t ام	
C'_{ij}	هزینه مازاد راه‌اندازی همزمان پروژه i ام و j ام	
c_{it}	هزینه حاصل از اجرای پروژه i ام در دوره t ام (تمام هزینه‌ها به غیر از راه‌اندازی)	
c'_{ijt}	هزینه حاصل از اجرای همزمان پروژه i ام و j ام در دوره t ام (تمام هزینه‌ها به غیر از راه‌اندازی)	
S_m	مجموعه‌ی پروژه‌های دولتی (باید همگی اجرا شوند)	
S_e	e امین مجموعه‌ی پروژه‌های انحصاری (حداکثر یکی از آنها اجرا شود)	
A_i	مجموعه‌ی پروژه‌هایی که اجرای یکی از پروژه‌ها وابسته اجرای همگی پروژه‌هاست.	
Q_i	مجموعه‌ی پروژه‌هایی که اجرای‌یکی از پروژه‌ها وابسته اجرای حداقل یکی دیگر از پروژه‌هاست.	
N_i	تعداد دوره‌ی اجرایی پروژه i ام	
T_i	زمان اجرای پروژه i ام	
T'	زمان‌یا طول دوره	
m_{ir}	میزان منبع مصرفی r مورد نیاز پروژه i ام	
m'_{ijr}	میزان منبع مصرفی r مازاد مورد نیاز پروژه i ام و j ام	
M_r	میزان منبع مصرفی r در دسترس	
R_{ih}	میزان منبع تجدیدپذیر h مورد نیاز پروژه i ام	
R'_{ijh}	میزان منبع تجدیدپذیر h مازاد مورد نیاز پروژه i ام و j ام	
R_{ht}	میزان منبع تجدیدپذیر h در دسترس در دوره t ام	
i,j	شمارنده مربوط به شماره پروژه	$\mathrm{i,j} = 1, \ldots . \mathrm{N}$
l,t	شمارنده مربوط به شماره دوره	$\mathrm{l,t} = 1, \ldots , \mathrm{T}$
R	شمارنده مربوط به منبع مصرفی	$\mathrm{r} = 1, \ldots , \mathrm{R}$
H	شمارنده مربوط به منبع تجدیدپذیر	$\mathrm{h} = 1, \ldots , \mathrm{H}$

متغیرها:

$\mathrm{X_{it}}$: اگر در دوره t ام پروژه i ام شروع به اجرا شود برابر ۱ در غیر اینصورت برابر ۰ است

$\mathrm{Y_{it}}$: اگر در دوره t ام پروژه iام در حال اجرا باشد برابر ۱ در غیر اینصورت برابر ۰ است

$$\max\ z_1 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} b_{it}\, Y_{it} + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\sum_{t=1}^{T} b'_{ijt} Y_{it}\, Y_{jt}$$ (۱۶)

$$\min\ z_2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} C_{it}\, X_{it} + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} C'_{ij} \sum_{t=1}^{T} X_{it} \sum_{t=1}^{T} X_{jt} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} c_{it}\, Y_{it} + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\sum_{t=1}^{T} c'_{ijt} Y_{it}\, Y_{jt}$$ (۱۷)

$s.t.$

$$\sum_{t=1}^{T} X_{it} = 1 \qquad \forall\, i \in S_m$$ (۱۸)

$$\sum_{t=1}^{T} X_{it} \le 1 \qquad \forall\, i$$ (۱۹)

$$\sum_{i \in S_e} \sum_{t=1}^{T} X_{it} \le 1 \qquad \forall\, e = 1, \ldots, E$$ (۲۰)

$$|A_i| \sum_{t=1}^{T} X_{it} \le \sum_{j \in A_i} \sum_{t=1}^{T} X_{jt} \qquad \forall\, i \in A_i$$ (۲۱)

$$2 \sum_{t=1}^{T} X_{it} \le \sum_{j \in Q_i} \sum_{t=1}^{T} X_{jt} \qquad \forall\, i \in Q_i$$ (۲۲)

$$N_i = \left[\frac{T_i}{T'} - \varepsilon\right] + 1 \qquad \forall i$$ (۲۳)

$$\sum_{l=t}^{\min\{t+N_i-1,T\}} Y_{il} \ge \min\{N_i, T-t+1\}\, X_{it} \qquad \forall\, i,t$$ (۲۴)

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} m_{ir}\, Y_{it} + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\sum_{t=1}^{T} m'_{ijr} Y_{it}\, Y_{jt} \le M_r \qquad \forall\, r$$ (۲۵)

$$\sum_{i=1}^{N} R_{ih}\, Y_{it} + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} R'_{ijh} Y_{it}\, Y_{jt} \le R_{ht} \qquad \forall\, h,t$$ (۲۶)

$$X_{it} \in \{0,1\}, \qquad Y_{it} \in \{0,1\} \forall\, i,t$$ (۲۷)

که در آن روابط (۱۶) و (۱۷)- توابع هدف - به ترتیب بیانگر بیشینه سازی مجموع عایدی‌ها، درآمدها و منافع و کمینه سازی مجموع هزینه‌ها می‌باشند. به علت داشتن دیمانسیون و مقیاس یکسان می‌توان توابع فوق را با هم جمع و به یک تابع هدف تبدیل نمود. با این حال در مقاله [۹] این توابع جدا از هم بیان شده‌اند. یکی از دلایل این امر می‌تواند تنوع پروژه‌ها باشد برای مثال گاهی سود پروژه‌های دولتی قابل اندازه گیری نیست. رابطه (۱۸) نشان دهنده محدودیت مجموعه پروژه‌های دولتی است که باید همگی آنها حتماً و صرفاً یکبار اجرا شوند. رابطه (۱۹) نشانگر این است که همه پروژه‌ها حداکثر یکبار قابل اجرا هستند. رابطه (۲۰) بیانگر محدودیت e امین مجموعه‌ی پروژه‌های انحصاری است که حداکثریکی از آنها قابل اجراست. رابطه (۲۱) محدودیت‌های A_i را بیان می‌کند که اجرای یکی از پروژه‌ها وابسته اجرای همه‌ی پروژه‌هاست. رابطه (۲۲) بیانگر محدودیت مجموعه‌ی پروژه‌های Q_i

است که اجرای یکی از پروژه‌ها وابسته به اجرای حداقل یکی دیگر از پروژه‌هاست. معادله (۲۳) را نمی‌توان به عنوان محدودیت مطرح کرد. این معادله نحوه به دست آوردن تعداد دوره‌های مورد نیاز برای اجرای پروژه‌ها را نشان می‌دهد. در این معادله هیچ پارامتر مجهولی وجود ندارد. رابطه (۲۴) رابطه بین X_{it} و Y_{it} را بیان می‌کند. بدینگونه که اگر X_{it} مقدار ۱ بگیرد Y_{it} و $Y_{i(t+1)}$ و ... به تعداد دوره‌های مورد نیاز برای اجرای پروژه i اممقدار ۱ بگیرد. در این محدودیت $min\{t+N_i-1,T\}$ و $\min\{\mathrm{N_i, T-t+1}\}$ هر دو مقادیر ثابتی هستند و پارامتر مجهولی درآنها وجود ندارد بنابراین معادله را غیر خطی نمی‌نماید. تعریف مقادیر فوق به این دلیل است که ما تنها برای T دوره می‌خواهیم برنامه‌ریزی کنیم و بیش از آن بسیار دور است و زمان‌بندی نمی‌شود. رابطه (۲۵) محدودیت منابع مصرفی r ام را بیان می‌کند. در این محدودیت فرض شده که منابع مصرفی از ابتدا در دسترس بوده و برای کل T دوره بیان شده است. رابطه (۲۶) محدودیت منابع تجدیدپذیر h ام در دوره‌ی t ام را مطرح می‌کند فرض شده است که این منابع در هر دوره تجدید شده و امکان کم و زیاد شدن را دارند.

۶. مدل استوار شده انتخاب پروژه

پارامترهای اضافه شده و تغییر یافته:

$\mathrm{b_{it}^s}$: سود حاصل از اجرای پروژه i ام در دوره t ام در سناریو s

$\mathrm{b'^s_{ijt}}$: سود حاصل از اجرای همزمان پروژه i ام و j ام در دوره t ام در سناریو s

$\mathrm{C_{it}^s}$: هزینه راه‌اندازی پروژه i ام در دوره t ام در سناریو s

$\mathrm{C'^s_{ij}}$: هزینه مازاد راه‌اندازی همزمان پروژه i ام و j ام در سناریو s

$\mathrm{c_{it}^s}$: هزینه حاصل از اجرای پروژه i ام در دوره t ام در سناریو s (تمام هزینه‌ها به غیر از راه‌اندازی)

$\mathrm{c'^s_{ijt}}$: هزینه حاصل از اجرای همزمان پروژه i ام و j ام در دوره t ام در سناریو s (تمام هزینه‌ها به غیر از راه‌اندازی)

$\mathrm{m_{ir}^s}$: میزان منبع مصرفی r مورد نیاز پروژه i ام در سناریو s

$\mathrm{m'^s_{ijr}}$: میزان منبع مصرفی r مازاد مورد نیاز پروژه i ام و j ام در سناریو s

$\mathrm{R_{ih}^s}$: میزان منبع تجدیدپذیر h مورد نیاز پروژه i ام در سناریو s

$\mathrm{R'^s_{ijh}}$: میزان منبع تجدیدپذیر h مازاد مورد نیاز پروژه i ام و j ام در سناریو s

λ, λ' : ضریب مربوط به استوار سازی

$\mathrm{p_s}$: احتمال وقوع سناریو s

s : شمارنده مربوط به سناریو $\mathrm{s = 1, \dots, S}$

متغیرهای اضافه شده:

θ_s, θ'_s : متغیرهای مربوط به خطی سازی واریانس بهینه سازی استوار

$$max\ \ z_1 = \sum_{s\in S} p_s\big(\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} b_{it}^s\, Y_{it} + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\sum_{t=1}^{T} b'^s_{ijt} Y_{it}\, Y_{jt}\big) + \lambda \sum_{s\in S} p_s\big[\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} b_{it}^s\, Y_{it} + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\sum_{t=1}^{T} b'^s_{ijt} Y_{it}\, Y_{jt} - \sum_{s'\in S} p_{s'}\big(\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} b_{it}^{s'}\, Y_{it} + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\sum_{t=1}^{T} b'^{s'}_{ijt} Y_{it}\, Y_{jt}\big) - 2\theta_s\big] \quad (۲۸)$$

$$min\ \ z_2 = \sum_{s\in S} p_s\big(\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} C_{it}^s\, X_{it} + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} C'^s_{ij} \sum_{t=1}^{T} X_{it} \sum_{t=1}^{T} X_{jt} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} c_{it}^s\, Y_{it} + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\sum_{t=1}^{T} c'^s_{ijt} Y_{it}\, Y_{jt}\big) + \lambda' \sum_{s\in S} p_s\big[\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} C_{it}^s\, X_{it} + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} C'^s_{ij} \sum_{t=1}^{T} X_{it} \sum_{t=1}^{T} X_{jt} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} c_{it}^s\, Y_{it} + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\sum_{t=1}^{T} c'^s_{ijt} Y_{it}\, Y_{jt} - \sum_{s'\in S} p_{s'}\big(\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} C_{it}^{s'}\, X_{it} + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} C'^{s'}_{ij} \sum_{t=1}^{T} X_{it} \sum_{t=1}^{T} X_{jt} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} c_{it}^{s'}\, Y_{it} + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\sum_{t=1}^{T} c'^{s'}_{ijt} Y_{it}\, Y_{jt}\big) + 2\theta'_s\big] \quad (۲۹)$$

$s.t.$

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} m_{ir}^s\, Y_{it} + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\sum_{t=1}^{T} m'^s_{ijr} Y_{it}\, Y_{jt} \le M_r \quad \forall\, r, s \quad (۳۰)$$

$$\sum_{i=1}^{N} R_{ih}^s\, Y_{it} + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} R'^s_{ijh} Y_{it}\, Y_{jt} \le R_{ht} \quad \forall\, h, t, s \quad (۳۱)$$

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} b_{it}^s\, Y_{it} + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\sum_{t=1}^{T} b'^s_{ijt} Y_{it}\, Y_{jt} - \sum_{s\in S} p_s\big(\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} b_{it}^s\, Y_{it} + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\sum_{t=1}^{T} b'^s_{ijt} Y_{it}\, Y_{jt}\big) + \theta_s \ge 0 \quad \forall s \quad (۳۲)$$

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} C_{it}^s\, X_{it} + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} C'^s_{ij} \sum_{t=1}^{T} X_{it} \sum_{t=1}^{T} X_{jt} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} c_{it}^s\, Y_{it} + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\sum_{t=1}^{T} c'^s_{ijt} Y_{it}\, Y_{jt} - \sum_{s\in S} p_s\big(\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} C_{it}^s\, X_{it} + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} C'^s_{ij} \sum_{t=1}^{T} X_{it} \sum_{t=1}^{T} X_{jt} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} c_{it}^s\, Y_{it} + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\sum_{t=1}^{T} c'^s_{ijt} Y_{it}\, Y_{jt}\big) + \theta'_s \ge 0 \quad \forall s \quad (۳۳)$$

$$\theta_s \ge 0 \quad \forall s, \qquad \theta'_s \ge 0 \quad \forall s' \quad (۳۴)$$

همچنین روابط (۱۸) الی (۲۴) و (۲۷) عینا در این مدل نیز تکرار می‌شوند.

۷. مدل خطی انتخاب پروژه

برای حل، نیاز است که مدل ساده سازی و به یک مدل خطی تبدیل شود که این ساده سازی با استفاده از معادله (x_1x_2 به

شرطی که $x_1, x_2 \in \{0,1\}$ معادل است با y به شرطی که $x_1 + x_2 - 1 \leq y$، $y \leq \frac{x_1+x_2}{2}$ و $(x_1, x_2, y \in \{0,1\})$ انجام می‌شود.

$$max\ \ z_1 = \sum_{s\in S} p_s\left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} b_{it}^{s}\, Y_{it} + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\sum_{t=1}^{T} b_{ijt}^{\prime s} U_{ijt}\right) + \lambda \sum_{s\in S} p_s\Big[\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} b_{it}^{s}\, Y_{it} + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\sum_{t=1}^{T} b_{ijt}^{\prime s} U_{ijt} - \sum_{s'\in S} p_{s'}\left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} b_{it}^{s'}\, Y_{it} + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\sum_{t=1}^{T} b_{ijt}^{\prime s'} U_{ijt}\right) - 2\theta_s\Big] \tag{۳۵}$$

$$min\ \ z_2 = \sum_{s\in S} p_s\left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} C_{it}^{s}\, X_{it} + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} C_{ij}^{\prime s} V_{ij} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} c_{it}^{s}\, Y_{it} + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\sum_{t=1}^{T} c_{ijt}^{\prime s} U_{ijt}\right) + \lambda' \sum_{s\in S} p_s\Big[\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} C_{it}^{s}\, X_{it} + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} C_{ij}^{\prime s} V_{ij} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} c_{it}^{s}\, Y_{it} + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\sum_{t=1}^{T} c_{ijt}^{\prime s} U_{ijt} - \sum_{s'\in S} p_{s'}\left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} C_{it}^{s'}\, X_{it} + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} C_{ij}^{\prime s'} V_{ij} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} c_{it}^{s'}\, Y_{it} + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\sum_{t=1}^{T} c_{ijt}^{\prime s'} U_{ijt}\right) + 2\theta'_s\Big] \tag{۳۶}$$

$s.t.$

$$Y_{it} + Y_{jt} - 1 \leq U_{ijt} \forall\, i,j,t \tag{۳۷}$$

$$U_{ijt} \leq \frac{Y_{it} + Y_{jt}}{2} \forall\, i,j,t \tag{۳۸}$$

$$\sum_{t=1}^{T} X_{it} + \sum_{t=1}^{T} X_{jt} - 1 \leq V_{ij} \forall\, i,j \tag{۳۹}$$

$$V_{ij} \leq \frac{\sum_{t=1}^{T} X_{it} + \sum_{t=1}^{T} X_{jt}}{2} \forall\, i,j \tag{۴۰}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} m_{ir}^{s}\, Y_{it} + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\sum_{t=1}^{T} m_{ijr}^{s} U_{ijt} \leq M_r \quad \forall\, r,s \tag{۴۱}$$

$$\sum_{i=1}^{N} R_{ih}^{s}\, Y_{it} + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} R_{ijh}^{s} U_{ijt} \leq R_{ht} \qquad \forall\, h,t,s \tag{۴۲}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} b_{it}^{s}\, Y_{it} + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\sum_{t=1}^{T} b_{ijt}^{\prime s} U_{ijt} - \sum_{s\in S} p_s\left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} b_{it}^{s}\, Y_{it} + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\sum_{t=1}^{T} b_{ijt}^{\prime s} U_{ijt}\right) + \theta_s \geq 0 \quad \forall s \tag{۴۳}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} C_{it}^{s}\, X_{it} + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} C_{ij}^{\prime s} V_{ij} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} c_{it}^{s}\, Y_{it} + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\sum_{t=1}^{T} c_{ijt}^{\prime s} U_{ijt} - \sum_{s\in S} p_s\left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} C_{it}^{s}\, X_{it} + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} C_{ij}^{\prime s} V_{ij} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} c_{it}^{s}\, Y_{it} + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\sum_{t=1}^{T} c_{ijt}^{\prime s} U_{ijt}\right) + \theta'_s \geq 0 \qquad \forall s \tag{۴۴}$$

$$U_{ijt} \in \{0,1\}, V_{ij} \in \{0,1\} \forall\, i,j,t \tag{۴۵}$$

همچنین روابط (۱۸) الی (۲۴)، (۲۷) و (۳۴) عینا در این مدل نیز تکرار می‌شوند.

چون $V_{ij} = \sum_{t=1}^{T} X_{it} \sum_{t=1}^{T} X_{jt}$ و چون $V_{ij} \in \{0,1\}$ پس داریم $\sum_{t=1}^{T} X_{it} \leq 1$ بنابراین رابطه (۱۹) محدودیتی اضافی است.

۸. مثال عددی

در این مثال ۳ سناریو فرض می‌شود. سناریوی اول دارای توزیع یکنواخت با واریانس (طول بازه) کم است و سناریوی دیگر دارای توزیع یکنواخت با همان میانگین و واریانس بیشتر است. همچنین سناریوی سوم با واریانسی برابر با سناریوی اول اما میانگین بدتر (برای سود کمتر و برای هزینه بیشتر) فرض شده است. این سناریوها برای بررسی نحوه تاثیر پارامترهای توزیع یکنواخت در نظر گرفته می‌شوند؛ می‌توان با افزایش تعداد سناریوها رفتار مدل را با دقت بیشتری مطالعه نمود، که در این تحقیق برای جلوگیری از پیچیدگی مساله و فاصله گرفتن از اهداف مقاله تنها به این ۳ سناریو اکتفا می‌شود. همچنین فرض می‌شود که به ترتیب با احتمال ۰.۵، ۰.۲ و ۰.۳ هریک از سناریوها رخ دهد. مقادیر پارامترهای مدل عبارتند از:

b_{it}^{1}: توزیع‌یکنواخت بین [52 58]

b_{it}^{2}: توزیع‌یکنواخت بین [55 65]

b_{it}^{3}: توزیع‌یکنواخت بین[51 57]

$b_{ijt}^{\prime 1}$: توزیع‌یکنواخت بین[28 32]

$b_{ijt}^{\prime 2}$: توزیع‌یکنواخت بین [25 35]

$b_{ijt}^{\prime 3}$: توزیع‌یکنواخت بین [27 31]

C_{it}^{1}: توزیع‌یکنواخت بین [23 27]

C_{it}^{2}: توزیع‌یکنواخت بین [20 30]

C_{it}^{3}: توزیع‌یکنواخت بین [22 26]

$C_{ij}^{\prime 1}$: توزیع‌یکنواخت بین [8 12]

$C_{ij}^{\prime 2}$: توزیع‌یکنواخت بین [5 15]

$C_{ij}^{\prime 3}$: توزیع‌یکنواخت بین [7 11]

c_{it}^{1}: توزیع‌یکنواخت بین [13 17]

c_{it}^{2}: توزیع‌یکنواخت بین [10 20]

c_{it}^{3}: توزیع‌یکنواخت بین [12 16]

$c_{ijt}^{\prime 1}$: توزیع‌یکنواخت بین [3 7]

$c_{ijt}^{\prime 2}$: توزیع‌یکنواخت بین [0 10]

$c_{ijt}^{\prime 3}$: توزیع‌یکنواخت بین [2 6]

m_{ir}^{1}: توزیع‌یکنواخت بین[80 100]

m_{ir}^{2}: توزیع‌یکنواخت بین [70 110]

m_{ir}^{3}: توزیع‌یکنواخت بین[70 90]

$m_{ijr}^{\prime 1}$: توزیع‌یکنواخت بین [40 50]

$m_{ijr}^{\prime 2}$: توزیع‌یکنواخت بین [30 60]

$m_{ijr}^{\prime 3}$: توزیع‌یکنواخت بین [35 45]

R_{ih}^{1}: توزیع‌یکنواخت بین [40 50]

R_{ih}^{2}: توزیع‌یکنواخت بین [30 60]

R_{ih}^{3}: توزیع‌یکنواخت بین [35 45]

$: R'^{1}_{ijh}$	توزیع‌یکنواخت بین [8 12]	
$: R'^{2}_{ijh}$	توزیع‌یکنواخت بین [5 15]	
$: R'^{3}_{ijh}$	توزیع‌یکنواخت بین [7 11]	
$: i,j$	شمارنده مربوط به شماره پروژه	$i,j = 1,\dots,15$ $N = 15$
$: l,t$	شمارنده مربوط به شماره دوره	$l,t = 1,\dots,5$ $T = 5$
$: r$	شمارنده مربوط به منبع مصرفی	$r = 1$
$: h$	شمارنده مربوط به منبع تجدیدپذیر	$h = 1$
$: s$	شمارنده مربوط به سناریو	$s = 1,\dots,3$
$: S_m$	پروژه‌های شماره ۱و۲	
$: S_e$	پروژه‌های شماره ۳، ۴ و۵	
$: A_i$	پروژه‌های شماره ۶،۷ و۸	
$: Q_i$	پروژه‌های شماره ۹، ۱۰ و ۱۱	
$: R_{ht}$	۳۰۰	
$: \lambda\ ,\ \lambda'$	۱	
$: p_1$	0.5	
$: p_2$	0.2	
$: T'$	طول دوره ۵ سال	
$: M_r$	۶۰۰	
$: p_3$	0.3	
$: T_i$	توزیع‌یکنواخت بین [0 15]	

با استفاده از روش پارامتریک مدل فوق را به یک مـدل تـک هدفـه تبدیل می‌کنیم و سپس از نـرم افـزار Lingo بـرای حـل اسـتفاده می‌کنیم. همچنین با تغییر ضرایب اهمیت توابع هدف، چند جـواب پارتویی بدست می‌آید که عبارتند از:

جدول ۱. جواب‌های پارتویی حل قطعی

جواب	مقدار تابع هدف		ضریب اهمیت توابع هدف
$x_{15}=x_{25}=x_{43}=1$	Zc=167	Zb=387	1*1
$x_{15}=x_{25}=x_{43}=1$	Zc=167	Zb=387	1*2
$x_{14}=x_{23}=x_{44}=1$	Zc=165	Zb=385	2*1
$x_{14}=x_{23}=x_{44}=1$	Zc=165	Zb=385	3*2
$x_{12}=x_{22}=1$	Zc=99	Zb=206	3*1

همانطور که از جدول فوق مشـخص اسـت بـا تغییـر ضـرایب گـاهی جواب تغییر نمی‌کند. با تغییـر بیشـتر ضـرایب جوابجدیـدی حاصـل نمی‌شود و جواب‌های پارتویی حاصل از ایـن روش همگـی در جـدول فوق ذکر شده‌اند. در این مساله پارامترهای حـل مـدل بـا اسـتفاده از الگـوریتم MOPSO عبارتنـد از: تعـداد جمعیـت ۳۰۰ ذره و حـداکثر ظرفیت مخـزن ۳۰ ذره، همچنـین C_1،w و C_2 بـه ترتیـب ۰.۵، ۱ و ۲ فرض شده‌اند. همچنین نرخ جهش ۰.۱ در نظـر گرفتـه شـده اسـت. کامپیوتر حل کننده این الگوریتم دارای CPU ۲.۳ گیگا هرتز است.

حل مدل با استفاده از الگوریتم بهینـه سـازی چنـد هدفـه تجمـع ذرات، جواب‌های پارتویی حاصل کرده که در جدول ۲ آمـده اسـت. این جواب‌ها با داشتن شرط توقف الگوریتم با حداکثر ۵۰ بار تکـرار جستجوی ذرات حاصل شده‌اند. زمان حل در این حالت ۱۵۳ ثانیـه بوده است البته در هر بار اجـرای برنامـه مـدت زمـان متفـاوت امـا نزدیک به این مقدار است. همچنین برای بررسی عملکرد الگـوریتم در شرایط متفاوت، شرط خاتمـه الگـوریتم را در ۴ حالـت حـداکثر مدت زمان اجرای ۲۰، ۳۰ و ۴۰ ثانیـه مـدنظر قـرار داده و مجـددا مدل حل شده و نتایج حاصل در جدول زیر آمده است. در جدول ۲ جواب‌های غیر پارتویی هـر حالـت نسـبت بـه جـواب‌هـای موجـود مشخص می‌شوند.

جدول ۲. جواب‌های الگوریتم بهینه‌سازی تجمع ذرات

	جواب	مقدار تابع هدف		
		بدون شرط مدت زمان اجرا		
۱	$x_{12}=x_{23}=1$	Zc=104	Zb=183	پارتویی
۲	$x_{12}=x_{22}=1$	Zc=108	Zb=210	پارتویی
۳	$x_{12}=x_{23}=x_{15\,1}=1$	Zc=165	Zb=245	پارتویی
۴	$x_{11}=x_{23}=x_{15\,1}=1$	Zc=169	Zb=273	پارتویی
۵	$x_{12}=x_{21}=x_{15\,1}=1$	Zc=178	Zb=301	پارتویی
۶	$x_{11}=x_{21}=x_{15\,1}=1$	Zc=183	Zb=331	غیر پارتویی
۷	$x_{12}=x_{23}=x_{13\,2}=1$	Zc=188	Zb=336	غیر پارتویی
		مدت زمان اجرای ۲۰ ثانیه		
۸	$x_{12}=x_{23}=1$	Zc=104	Zb=183	پارتویی
۹	$x_{12}=x_{22}=1$	Zc=108	Zb=210	پارتویی
۱۰	$x_{11}=x_{23}=x_{13\,2}=1$	Zc=184	Zb=333	غیر پارتویی
۱۱	$x_{12}=x_{23}=x_{13\,2}=1$	Zc=188	Zb=336	غیر پارتویی
		مدت زمان اجرای ۳۰ ثانیه		

۱۲	$x_{12}=x_{23}=1$	Zc=104	Zb=183	پارتویی
۱۳	$x_{12}=x_{22}=1$	Zc=108	Zb=210	پارتویی
۱۴	$x_{12}=x_{21}=x_{13\ 2}=1$	Zc=181	Zb=326	غیر پارتویی
۱۵	$x_{12}=x_{23}=x_{13\ 2}=1$	Zc=188	Zb=336	غیر پارتویی
۱۶	$x_{11}=x_{21}=x_{43}=1$	Zc=202	Zb=394	پارتویی
		مدت زمان اجرای ۴۰ ثانیه		
۱۷	$x_{12}=x_{23}=1$	Zc=104	Zb=183	پارتویی
۱۸	$x_{12}=x_{23}=x_{14\ 1}=1$	Zc=180	Zb=336	پارتویی
۱۹	$x_{12}=x_{22}=x_{14\ 1}=1$	Zc=214	Zb=370	غیر پارتویی
		مدت زمان اجرای ۵۰ ثانیه		
۲۰	$x_{12}=x_{23}=1$	Zc=104	Zb=183	پارتویی
۲۱	$x_{12}=x_{21}=1$	Zc=111	Zb=208	غیر پارتویی
۲۲	$x_{12}=x_{21}=x_{33}=1$	Zc=202	Zb=389	غیر پارتویی

اگرچه تضاد موجود بین دو تابع هدف در جدول فوق بیانگر اینست که حل MOPSO با توجه به حل به روش انشعاب و تحدید دور از ذهن نیست اما جواب‌های غیر پارتویی معرفی شده در هر سری حل این نکته را یادآور می‌شوند که روش‌های فراابتکاری لزوماً جواب بهینه را معرفی نمی کنند. همچنین جدول فوق نشانگر این است که الگوریتمMOPSO با محدودسازی مدت حل، لزوما جواب بدتری تولید نمی کند به عنوان مثال جواب ۱۸ بر جواب ۶ و ۷ غلبه و آنها را غیر پاتویی نمود.واضح است که جواب روش انشعاب و تحدید با استفاده از نرم افزار لینگو در صورت امکان بهتر از جواب هر الگوریتم فراابتکاری است. اما این نرم افزار با افزایش تعداد متغیرها دیگر قادر به حل مدل نیست و لذا ناچار به حل با الگوریتم MOPSO خواهیم بود. در اینصورت سرعت حل و تعداد تنوع جواب‌های پارتویی الگوریتم MOPSO به مراتب بیشتر از حل قطعی خواهد بود که به موجب آن تصمیم گیرنده انتخاب‌های بیشتری خواهد داشت. البته باید توجه داشت که بعضی از این جواب‌های متنوع قابل اعتماد نیستند و علت تنوع زیاد جواب‌ها، غیرپارتویی بودن آنهاست.

۹. نتیجه گیری

در سال‌های اخیر انتخاب پروژه‌های مناسب برای سرمایه داران در سطح کلان، پیمانکاران، شرکت‌های عمرانی و بانک‌ها بسیار مهم بوده است چرا که کمبود بودجه، عدم دریافت به موقع صورت وضعیت‌ها، کم بودن بازده بعضی قراردادها، تاخیر دستیابی به سود در بعضی پروژه‌ها و عدم ثبات قیمت‌ها در بازار، این شرکت‌ها و موسسات را با مشکلات فراوانی مواجه می‌کند. لذا داشتن دید مدیریتی نسبت به انتخاب پروژه و درک بهتر از شرایط نامطمئن آینده کمک شایانی برای جلوگیری از زیان این شرکت‌ها می‌کند. در این مقاله، یک مدل انتخاب پروژه در شرایط عدم اطمینان با برنامه‌ریزی محدودیت‌ها ارائه شد که اجرای ا عدم اجرای پروژه‌ها را در طول چند دوره برنامه‌ریزی می‌کند. همچنین در این مقاله فرض می‌شود که مدت زمان اجرای پروژه‌ها یکسان نیست و در طول دوره‌های مختلف، هزینه‌ها و منافع ثابتی ندارند. ریسک اجرای پروژه‌ها با استفاده از پارامترهای نامطمئن و براساس سناریو نویسی وارد مدل شد. بنابراین با استفاده از تکنیک بهینه سازی استوار بر پایه سناریو، ریسک‌های انتخاب پروژه وارد مدل شدند. همچنین مدل خطی شده‌ای ارائه گشت تا بتوان مدل را با نرم افزارهای حل قطعی مانند Lingo یا GAMS در مسائل کوچک حل کرد. برای مسائل بزرگتر الگوریتم MOPSO ارائه شد. همچنین یک نمونه حل شده از مسئله‌ی کوچک با استفاده از هر دو روش دقیق و فراابتکاری ارائه شد. مقایسه‌ی جواب‌های دو روش بیانگر این است که الگوریتم فراابتکاری پیشنهادی جوابهایی نزدیک به حل دقیق ارائه می‌دهد. در تحقیقات آینده می‌توان با در نظرگیری پارامترهای کنترل موجودی مدل مدیریت پروژه را توسعه داد. همچنین در مثال عددی می‌توان سناریوهای متعددی تولید نمود و میزان تاثیر هر یک از آنها در مدل را بررسی نمود.

مراجع

[1] Fang Y, Chen L, Fukushima M. A mixed R&D projects and securities portfolio selection model, European Journal of Operational Research, 2008, No. 2, Vol. 185, pp. 700-715.

[2] Lee JW, Kim SH. An integrated approach for interdependent information system project selection, International Journal of Project Management, 2001, Vol. 19, pp. 111-118.

[3] Nemhauser GL, Ullmann Z. Discrete dynamic programming and capital allocation, Management Science, 2013, No. 9, Vol. 15, pp. 494-505.

[4] Pritsker AAB, Watters LJ, Wolfe PM. Multi project scheduling with Limited Resources: A Zero-One Programming Approach, Management Science, 1969, No. 1, Vol. 16, pp. 93-108.

[5] Lova A, Maroto C, Tormos P. A multi criteria heuristic method to improve resource allocation in multi project environment, European Journal of Operational Research, 2000, Vol. 127, pp. 408-424.

[6] Goncalves JF, Mendes JJM, Resende MGC. A genetic algorithm for resource constrained multi-project scheduling problem, European Journal of Operational Research, 2008, Vol. 189, pp. 1171-1190.

[7] Mittal ML, Kanda A. Two phase heuristics for scheduling of multiple projects, International Journal of Operational Research, 2009, No. 2, Vol. 4, pp. 159-177.

[8] Ghorbani S, Rabbani M. A new multi-objective algorithm for a project selection problem, Advances in Engineering Software, 2009, No. 1, Vol. 40, pp. 9-14.

[9] Rabbani M, Aramoon Bajestani M, Baharian Khoshkhou, G. A multi-objective particle swarm optimization for project selection problem, Expert Systems with Applications, 2010, Vol. 37, pp. 315-321.

[10] Sprecher A, Hartmann S, Drexl A. an exact algorithm for project scheduling with multiple modes, OR Spektrum, 1997, Vol. 19, pp. 195-203.

[11] Jozefowska J, Mika M, Rozycki R, Waligora, G, Weglarz J. Simulated annealing for multi-mode resource constrained project scheduling problem, Annals of Operations Research, 2001, Vol. 102, pp. 137-155.

[12] Alcaraz J, Marato C, Ruiz R. Solving the multi-mode resource-constrained project scheduling problem with genetic algorithms, Journal of Operational Research Society, 2003, Vol. 54, pp. 614-626.

[13] Hartmann S. Project scheduling with multiple modes: A genetic algorithm. Annals of Operations Research, 2001, Vol. 102, pp. 111-135.

[14] Lova A, Tormos P, Cervantes M, Barber F. An efficient hybrid genetic algorithm for scheduling projects with resource constraints and multiple execution modes, International Journal of Production Economics, No. 2, Vol. 117, pp. 302-316.

[15] Kolisch R, Padman R. An integrated survey of deterministic project scheduling, OMEGA, 2001, Vol. 29, pp. 249-272.

[16] Zapata JC, Hodge BM, Reklaitis GV. The multimode resource constrained multi project scheduling problem: Alternative formulations, AlChe Journal, 2008, No. 8, Vol. 54, pp. 2101-2119.

[17] Medaglia AL, Graves SB, Ringuest JL. A multi objective evolutionary approach for linearly constrained project selection under uncertainty, European Journal of Operational Research, 2007, Vol. 179, pp. 869-894.

[18] Li Z. Stochastic optimization model and O (N 2) solution algorithm for highway investment decision making under budget uncertainty, Journal of Transportation Engineering, 2009, No. 6, Vol. 135, pp. 371-379.

[19] Li Z, Madanu S. Highway project level life-cycle benefit/cost analysis under certainty, risk, and uncertainty: Methodology with case study, Journal of Transportation Engineering, 2009, No. 8, Vol. 135, pp. 516-526.

[20] Wey WM. A multi objective optimization model for urban renewal projects selection with uncertainty considerations, In Proceedings of 4th International Conference on Natural Computation (ICNC), pp. 423-427.

[21] Mulvey JM, Vanderbei RJ, Zenios SA. Robust optimization of large-scale systems, Operations Research, 1995, Vol. 43, pp. 264-281.

[22] Peng P, Snyder LV, Lim A, Liu Z. Reliable logistics networks design with facility disruptions, Transportation Research Part B: Methodological, 2011, No. 8, Vol. 45, pp. 1190-1211.

[23] Soyster AL. Technical note-convexprogramming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming, Operations research, 1973, No. 5, Vol. 21, pp. 1154-1157.

[24] Ben-Tal A, Nemirovski A. Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data, Mathematical programming, 2000, No. 3, Vol. 88(3), pp. 411-424.

[25] Bertsimas D, Sim M. The price of robustness, Operations Research, 2004, No. 1, Vol. 52, pp. 35-53.

[26] Fu Y, Lai KK, Liang L. A robust optimization approach to the problem of supplier selection and allocation in outsourcing, International Journal of Systems Science, (ahead-of-print), 2014, pp. 1-6.

[27] Rahmani D, Ramezanian R, Fattahi P, Heydari, M. A robust optimization model for multi-product two-stage capacitated production planning under uncertainty, Applied Mathematical Modeling, 2013, No. 20, Vol. 37, pp. 8957-8971.

[28] Huang E, Goetschalckx M. Strategic robust supply chain design based on the Pareto-optimal tradeoff between efficiency and risk, European Journal of Operational Research, 2014, No. 2, Vol. 237, pp. 508-518.

[29] Baghalian A, Rezapour S, Farahani RZ. Robust supply chain network design with service level against disruptions and demand uncertainties: A real-life case, European Journal of Operational Research, 2013, No. 1, Vol. 227, pp. 199-215.

[30] Rajabi M, Bolhari A. A robust optimization model for a supply chain under uncertainty, IMA Journal of Management Mathematics, dpt014, 2013.

[31] Doerner K, Gutjahr W, Hartl R, Strauss C, Stummer C. Pareto ant colony optimization: A met heuristic approach to multi-objective portfolio selection, Annals of Operations Research, 2004, Vol. 131, pp. 79-99.

[32] Stummer C, Heidenberger K. Interactive R & D portfolio selection considering multiple objectives, project interdependencies, and time: A three phase approach. In D. Kocaoglu, & T. Anderson (Eds.), Technology management in the knowledge era pp. 423-428, Portland, Picmet, 2001.

[33] Badri M, Davis D, Davis D. A comprehensive 0–1 goal programming model for project selection, International Journal of Project Management, 2001, Vol. 19, pp. 243-252.

[34] Rabbani M, Tavakoli Moghadam R, Jolai F, Ghorbani H. A comprehensive model for R & D project with 0–1 linear goal programming, International Journal of Engineering, 2006, Vol. 19, pp. 55-66.

[35] Dey PK. Integrated project evaluation and selection using multiple attribute decision-making technique, International Journal of Economics, 2006, Vol. 103, pp. 90-103.

[36] Gabriel SA, Kumar S, Ordẽz J, Nasserian A. A multi-objective optimization model for project selection with probabilistic considerations, Socio-Economic Planning Sciences, 2006, Vol. 40, pp. 297-313.

[37] Carlsson C, Fullér R, Heikkil M, Majlender P. A fuzzy approach to R & D project portfolio selection, International Journal of Approximate Reasoning, 2007, Vol. 44, pp. 93-105.

[38] Huang X. Optimal project selection with random fuzzy parameters, International Journal of Production Economics, 2007, Vol. 106, pp. 513-522.

[39] Hoyland K, Wallace SW. Generating scenario trees for multistage decision problems, Management Science, 2001, Vol. 47, pp. 295-307.

[40] Bai D, Carpenter T, Mulvey J. Making a case for robust optimization models, Management Science, 1997, Vol. 43, pp. 895-907.

[41] Mulvey JM, Ruszczynski A. A new scenario decomposition method for large-scale stochastic optimization, Operations Research, 1995, Vol. 43, pp. 477-490.

[42] Yu CS, Li HL. A robust optimization model for stochastic logistic problems, International Journal of Production Economics, 2000, Vol. 64, pp. 385-397.

[43] Kennedy J, Eberhart R. Particle swarm optimization, IN Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks, 1995, No. 2, Vol. 4, pp. 1942-1948.

[44] Kennedy JF, Kennedy J, Eberhart RC. Swarm Intelligence, Morgan Kaufmann, 2001.

[45] Zhu H, Wang Y, Wang K, Chen Y. Particle swarm optimization (PSO) for the constrained portfolio optimization problem, Expert Systems with Applications, 2011, No. 8, Vol. 38, pp. 10161-10169.

[46] Kennedy J, Eberhart RC. A discrete binary version of the particle swarm algorithm, In Systems, Man, and Cybernetics, 1997. Computational Cybernetics and Simulation. 1997 IEEE International Conference on, Vol. 5, pp. 4104-4108.

[47] Abraham A, Jain L, Goldberg R. Evolutionary Multi - objective Optimization: Theoretical Advances and Applications, Springer London, 2005.

[48] Coello Coello CA, Lechuga MS. MOPSO: A proposal for multiple objective particle swarm optimization, IEEE, 2002, pp. 1051-1056.

[49] Reyes–Sierra M, Coello Coello CA. Multi–Objective Particle Swarm Optimizers: A Survey of the State – of – the – Art, International Journal

of Computational Intelligence Research, 2006, No. 3, Vol. 2, pp. 287-308.

[50] Coello Coello CA, Lechuga MS. Handling Multiple Objectives with Particle Swarm Optimization, IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2004, No. 3, Vol. 8, pp. 256-279.