

بررسی تعدادی از روشهای آماری جهت ترسیم نمودار کنترل مشاهدات انفرادی برای فرایندهای اتورگرسیو

عباس سقایی، یاسر صمیمی، و کامران پی‌نبر

چکیده: تاکنون مقالات زیادی درباره تاثیر خود همبستگی مشاهدات بر عملکرد نمودارهای کنترل شوهارت به رشته تحریر در آمده است. پیشرفت تکنیکهای بازرسی خودکار که امکان ممیزی و ارزیابی مشخصه‌های کیفی محصولات را همگام با روند تولید آنها فراهم ساخته است نیز روز به روز بر اهمیت این موضوع می‌افزاید. آگاهی از روشهای مختلف جایگزین نمودارهای کنترل مرسوم بمنظور پایش فرایندهای خود همبسته، مهندسين و کاربران را برای استفاده موثر از تکنیکهای آماری نظارت بر فرایند یاری خواهد نمود. از سوی دیگر توسعه بکارگیری تکنیکهای سری زمانی در این زمینه، موجب عدم توجه کافی به دیگر روشهای آماری و ناآشنایی با خواص فرایندهای خودهمبسته گردیده است. با توجه به این امر، در این مقاله ضمن معرفی و ارایه مثال از مهمترین رویکردهای نظری جهت ترسیم نمودار کنترل برای مشاهدات انفرادی، بهنگام وجود خودهمبستگی، به مقایسه عملکرد آنها به لحاظ میزان حساسیت در تشخیص تغییرات میانگین یک فرایند اتورگرسیو پرداخته شده است. نهایتاً سعی شده است با ارایه خطوط راهنما برای انتخاب مناسبترین روش از بین روشهای ارایه شده، شرایط بکارگیری هر روش متناسب با خصوصیات فرایند تحت بررسی نیز مورد تجزیه و تحلیل قرار داده شود.

واژه های کلیدی: کنترل فرایند آماری، خودهمبستگی، سری زمانی، نمودار کنترل مشاهدات انفرادی

۱. مقدمه

برای استفاده از نمودارهای کنترل شوهارت فرض می‌شود هنگامیکه فرآیند تحت کنترل به سر می‌برد، مشاهدات گردآوری شده از آن دارای توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف معیار σ بوده و از یکدیگر مستقل هستند. این شرایط به اختصار با علامت NID نیز نشان داده می‌شود. عبارت دیگر می‌توان گفت هنگامی که فرآیند از وضعیت تحت کنترل برخوردار است، مشخصه کیفی در زمان t ، x_t ، از مدل $x_t = \mu + \varepsilon_t$ ، $(t = 1, 2, \dots)$ ، پیروی می‌کند [۱]. در این رابطه ε_t یک متغیر تصادفی است که از توزیع نرمال با میانگین صفر و انحراف معیار σ_ε پیروی می‌کند و مقادیر آن در

طول زمان از هم مستقل‌اند. مدل فوق به مدل شوهارت معروف است و نمودارهای کنترل شوهارت بر همین مبنا توسعه یافته‌اند. در مواردیکه شرط نرمال بودن مشاهدات تا حدی جزئی نقض می‌شود، همچنان می‌توان از نمودارهای کنترل شوهارت استفاده نمود. مهمترین شرط برای استفاده از نمودارهای کنترل فرض استقلال مشاهدات است چراکه حتی وجود مقدار کمی همبستگی مابین مشاهدات، کارایی نمودارهای کنترل مرسوم را مختل خواهد نمود. بویژه آنکه وجود خودهمبستگی مثبت در مشاهدات، منجر به افزایش قابل توجه علائم هشدار اشتباه و وجود خودهمبستگی منفی سبب افزایش خطای نوع دوم در نمودارهای کنترل خواهد شد [۲]. متأسفانه فرض استقلال مشاهدات حتی بصورت تقریبی نیز در برخی فرایندهای تولیدی وجود ندارد. برای نمونه می‌توان فرایندهای شیمیائی را خاطرنشان ساخت که مشاهدات متوالی از فرآیند، اغلب از همبستگی زیادی برخوردارند. از سوی دیگر وجود رویه‌های بازرسی و آزمایش خودکار که امکان اندازه‌گیری کلیه تولیدات یک فرآیند را مطابق ترتیب زمانی تولید آنها فراهم ساخته است، سبب افزایش میزان خودهمبستگی مابین مشاهدات متوالی خواهد شد. اساساً تمامی فرایندهای تولیدی دارای مجموعه‌ای از

این مقاله در تاریخ ۸۳/۷/۱ دریافت و در تاریخ ۸۴/۵/۲ به تصویب نهایی رسیده است.

دکتر عباس سقایی، بخش مهندسی صنایع، دانشکده فنی، واحد علوم و تحقیقات دانشگاه آزاد اسلامی، abbas@thqi.org

دکتر یاسر صمیمی، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، samimi@mail.iust.ac.ir

کامران پی‌نبر، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، k_peynabar@mail.iust.ac.ir

افزایش احتمال خطای نوع اول در نمودار کنترل X می‌شود. علت اصلی این موضوع آنست که هنگامیکه مشاهدات فرایند دارای خود همبستگی هستند استفاده از آماره MR جهت تخمین انحراف معیار فرایند، برآوردی اریب حاصل می‌سازد.

در جدول ۲ متوسط طول دنباله برای نمودار کنترل X در وضعیت تحت کنترل و همچنین هنگامیکه شیفت به اندازه یک انحراف معیار در میانگین فرایند رخ داده است به نقل از وایرینگا ارائه شده است [۵]. این مقادیر از طریق شبیه سازی با ۱۰۰,۰۰۰ بار تکرار بدست آمده است.

سطر مربوط به ضریب خودهمبستگی صفر در واقع عملکرد یک نمودار شوهارت برای مشاهدات مستقل را نشان می‌دهد. در ستون سوم از جدول ۲ برآورد انحراف معیار فرایند با استفاده از آماره MR نشان داده شده است.

چنین نتیجه می‌شود که وقتی مشاهدات دارای همبستگی مثبت هستند آماره MR انحراف معیار فرایند را کمتر از مقدار واقعی آن و در صورتیکه مشاهدات از همبستگی منفی برخوردار باشند آماره MR انحراف معیار فرایند را بیش از مقدار واقعی آن تخمین می‌زند.

۳. ترسیم نمودار کنترل برای مشاهدات خودهمبسته

۳-۱. رفع خودهمبستگی

اولین رویکرد برای ترسیم نمودار کنترل شوهارت برای یک فرایند خودهمبسته رفع خودهمبستگی از مشاهدات است. ساده‌ترین راه برای مقابله با خودهمبستگی در نمونه‌های متوالی، افزایش فاصله زمانی بین نمونه‌ها است.

کاهش تناوب نمونه‌گیری تا حد زیادی موجب حذف خودهمبستگی در داده‌های فرآیند می‌شود. اما استفاده از این رویکرد اولاً عدم کارایی در استفاده از کلیه مشاهدات گردآوری شده از فرآیند را در پی خواهد داشت و ثانیاً افزایش فاصله زمانی مابین نمونه‌ها زمان لازم جهت کشف و شناسایی تغییرات در فرآیند را بطور قابل توجهی افزایش خواهد داد.

بمنظور پایش فرآیندهای خودهمبسته روشهای مؤثرتری موردنیاز است که در دو گروه شامل رویکردهای بر پایه مدل و رویکردهای مستقل از مدل دسته‌بندی می‌شوند [۶]. گروه اول یعنی روشهای بر پایه مدل که در این مقاله نیز مورد بحث واقع خواهند شد خود شامل سه رویکرد ۱- اصلاح نمودار کنترل شوهارت، ۲- رویکرد ترسیم نمودار باقیمانده و ۳- رویکرد استفاده از تقریب توسط آماره $EWMA$ می‌باشد. در ادامه به تشریح روشهای مذکور می‌پردازیم.

ویژگیها و نیروهای خاص خود هستند و هرگاه فاصله زمانی مابین نمونه‌ها نسبت به این ویژگیها کوچک باشد مشاهدات فرآیند در طول زمان از همبستگی برخوردار خواهند بود [۱].

نحوه ارائه مطالب این مقاله بدین صورت است که بخش دوم به بررسی تاثیر خودهمبستگی بر عملکرد نمودارهای کنترل مشاهدات انفرادی شوهارت اختصاص یافته است. در بخش سوم راهکارهای مختلف جهت مقابله با مشکلات نمودار کنترل در حضور مشاهدات خودهمبسته مطرح شده و با یکدیگر مقایسه می‌شوند. نهایتاً در بخش پایانی مقاله به جمع‌بندی مطالب و نتیجه‌گیری پرداخته می‌شود.

۲. تأثیر خودهمبستگی مشاهدات بر عملکرد نمودارهای کنترل شوهارت

تأثیر خودهمبستگی بر عملکرد نمودارهای کنترل توسط تعدادی از محققین مانند مراقه و وودال، الوان و رابرتز و مونتگمری و فریدمن بررسی شده است [۳، ۴]. چنانچه بدون توجه به وجود خودهمبستگی از نمودارهای کنترل شوهارت برای مشاهدات انفرادی یعنی نمودارهای $X - MR$ استفاده شود، می‌توان مقدار احتمال خطای نوع اول حاصل را در جدول ۱ ملاحظه نمود.

جدول ۱ - مقادیر خطای نوع اول در نمودار کنترل X به

ازای مقادیر مختلف ضریب خودهمبستگی

ضریب خودهمبستگی	احتمال خطای نوع اول	مقدار انحراف معیار در برآورد احتمال خطای نوع اول
-0.9	0.00010	0.00016
-0.8	0.00016	0.00024
-0.7	0.00013	0.00019
-0.6	0.00020	0.00024
-0.5	0.00031	0.00020
-0.4	0.00069	0.00047
-0.3	0.00074	0.00063
-0.2	0.00150	0.00090
-0.1	0.00149	0.00061
0	0.00290	0.00121
0.1	0.00429	0.00183
0.2	0.00715	0.00266
0.3	0.01258	0.00333
0.4	0.02054	0.00616
0.5	0.03426	0.00543
0.6	0.05987	0.00733
0.7	0.09980	0.01242
0.8	0.18330	0.01368
0.9	0.34356	0.02175

مشاهده می‌شود که ضریب خودهمبستگی منفی سبب کاهش احتمال خطای نوع اول و ضریب خودهمبستگی مثبت موجب

جدول ۲. مقادیر متوسط طول دنباله برای نمودار کنترل \bar{X} به ازای مقادیر مختلف ضریب خود همبستگی (ϕ)

ϕ	σ_x	$E[\overline{MR}/d_2]$	$ARL_0(\mu = \mu_0)$	$ARL_1(\mu = \mu + \sigma_x)$
-0.9	2.2942	3.1623	45179.41	1743.99
-0.6	1.2500	1.5811	7125.77	396.39
-0.3	1.0483	1.1952	1604.25	128.71
0.0	1.0000	1.0000	370.22	43.84
0.3	1.0483	0.8771	85.60	17.28
0.6	1.2500	0.7906	22.84	8.60
0.9	2.2942	0.7255	8.15	3.86

$AR(1)$ با ضریب همبستگی ϕ پیروی کنند آنگاه تابع چگالی احتمال MR عبارتست از:

$$f(mr) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{(1-\phi)\pi}} e^{-\frac{mr^2}{4\sigma_x^2(1-\phi)}}, mr \geq 0 \quad (4)$$

و مقدار ارزش انتظاری MR به شکل $E(MR) = 2\sigma_x \sqrt{1-\phi} / \sqrt{\pi}$ محاسبه می‌شود. بعبارت دیگر هنگامیکه با مجموعه‌ای از مشاهدات خودهمبسته از یک فرایند $AR(1)$ سروکار داریم مقدار آماره \overline{MR}/d_2 یک برآورد کننده اریب برای انحراف معیار فرایند به شمار می‌رود. بنابراین چنانچه مقدار ϕ بزرگتر از صفر باشد انحراف معیار فرایند کمتر از مقدار σ_x برآورد خواهد شد.

بنابراین حدود کنترل به یکدیگر نزدیک شده و مقدار خطای نوع اول نمودار افزایش خواهد یافت. از سوی دیگر اگر ϕ کوچکتر از صفر باشد برآورد کننده مقداری بیش از σ_x را برآورد می‌کند و بالطبع با افزایش فاصله حدود کنترل از هم مقدار احتمال خطای نوع دوم افزایش می‌یابد.

پس از بررسی مشکل ناشی از بکارگیری نمودار MR برای مشاهدات خودهمبسته در ادامه به بررسی شرایط ترسیم نمودار شوهارت برای مشاهدات حاصل از یک فرایند $AR(1)$ می‌پردازیم. ترسیم نمودار کنترل \bar{X} و تعیین حدود $\bar{X} \pm 3\sigma_x$ برای مشاهدات x_1, x_2, \dots, x_n که از این پس با عنوان نمودار شوهارت اصلاح شده مورد اطلاق قرار می‌گیرد مستلزم تهیه یک برآورد کننده ناریب برای انحراف معیار فرایند است.

این امر چندان مشکل به نظر نمی‌رسد چرا که پس از شناسایی مقدار ضریب خود همبستگی در فرایند $AR(1)$ می‌توان با اصلاح مقدار آماره \overline{MR}/d_2 و یا با استفاده از مقدار واریانس باقیمانده‌های حاصل از برازش مدل به مشاهدات واقعی، از طریق

۳-۲. رویکردهای مبتنی بر مدل در ترسیم نمودار کنترل برای مشاهدات خودهمبسته

۳-۲-۱. اصلاح نمودار کنترل شوهارت برای فرایندهای خودهمبسته

دراین قسمت به مطالعه دسته‌ای از فرایندهای خودهمبسته خواهیم پرداخت که از مدل اتورگرسیو^۱ با تأخیر یک، $AR(1)$ ، پیروی می‌کنند. این مدل بصورت زیر ارائه می‌شود:

$$x_t - \mu_t = \phi(x_{t-1} - \mu_{t-1}) + \epsilon_t, t \in Z \quad (1)$$

بطوریکه $\phi \in (-1,1)$ و ϵ_t مانند قبل تعریف می‌شود. همچنین واریانس مشاهدات عبارتست از $\sigma_x^2 = \sigma_\epsilon^2 / (1 - \phi^2)$. فرض کنید بدون توجه به وجود خودهمبستگی قصد داشته باشیم نمودار کنترل شوهارت را برای مشاهدات x_1, x_2, \dots, x_n ترسیم کنیم. جهت محاسبه حدود کنترل در نمودار \bar{X} از آماره \overline{MR}/d_2 برای تخمین انحراف معیار فرایند استفاده می‌شود بطوریکه میانگین دامنه متحرک از رابطه ۲ تعیین می‌شود.

$$\overline{MR} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n MR_i \quad (2)$$

همچنین داریم $MR_i = |x_i - x_{i-1}|$ و $d_2 = 2/\sqrt{\pi}$. اگر x_i و x_{i-1} از هم مستقل باشند تابع چگالی MR عبارتست از:

$$f(mr) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{\pi}} e^{-\frac{mr^2}{4\sigma_x^2}}, mr \geq 0 \quad (3)$$

بنابراین ارزش انتظاری این آماره بصورت $E(MR) = 2\sigma_x / \sqrt{\pi}$ محاسبه می‌شود. این مطلب نشان می‌دهد که \overline{MR}/d_2 یک برآورد کننده ناریب برای انحراف معیار مشاهدات مستقل بدست می‌دهد. اما چنانچه مطابق فرض، مشاهدات از مدل همبستگی

¹Auto-Regressive

همچنان که مشاهده می‌شود مقدار ARL برای حالت تحت کنترل به ازای مقادیر ϕ قرینه با هم برابرست. همچنین به نظر می‌رسد که برای $|\phi| \leq 0.6$ مقدار ARL تحت کنترل برای نمودار اصلاح شده چندان با شرایط NID متفاوت نیست اما برای مقادیر $|\phi| > 0.6$ با افزایش قابل توجه مقدار ARL تحت کنترل مواجه هستیم.

بنظر ایجاد امکان مقایسه بین نمودار شوهارت با حدود مبتنی بر σ_x واقعی و نمودار شوهارت برای مشاهدات مستقل باید مقدار ARL در وضعیت تحت کنترل برای این دو نمودار یکسان باشد. عبارت دیگر چنانچه حدود نمودار اصلاح شده را با رابطه $\mu \pm h\sigma_x$ مشخص کنیم، دومین اقدام برای اصلاح نمودار کنترل شوهارت شامل اصلاح ضریب حدود کنترل یعنی h به ازای مقادیر مختلف ϕ در یک فرایند $AR(1)$ است به گونه‌ای که مقدار متوسط طول دنباله در حالت تحت کنترل تقریباً برابر با ۳۷۰ باشد. برای این منظور با استفاده از نرم افزار MATLAB برنامه‌ای تهیه شده است که با دقت ۰،۰۱ به جستجوی مقدار پارامتر h می‌پردازد و نتیجه آنرا می‌توان در شکل ۳ مشاهده نمود.

از آنجا که مقدار پارامتر h نسبت به مقادیر مثبت و منفی ضریب همبستگی در یک فرایند $AR(1)$ متقارن می‌باشد این نمودار به صورت یکطرفه و تنها به ازای مقادیر مثبت ترسیم شده است. با افزایش مقدار مطلق ضریب همبستگی از مقدار صفر به سمت مقدار یک، مقدار ضریب حدود کنترل برای دستیابی به مقدار متوسط طول دنباله ۳۷۰ در وضعیت تحت کنترل از عدد ۳ به سمت عدد ۲ میل می‌کند.

همچنانکه اشاره شد برای مقادیر کوچک تا متوسط ضریب همبستگی به نظر می‌رسد استفاده از حدود $\mu \pm 3\sigma_x$ اشکال عمده‌ای ایجاد نخواهد نمود اما به ازای مقادیر $|\phi| > 0.6$ حدود کنترل باید تنگتر در نظر گرفته شود. پس از محاسبه ضریب حدود کنترل مجدداً مقادیر متوسط طول دنباله را محاسبه می‌کنیم. دو شکل ۴ و ۵، ARL را برای وضعیت تحت کنترل و خارج از کنترل به ازای مقادیر مختلف ϕ نشان می‌دهند. بطور کلی می‌توان نتیجه گرفت که وجود همبستگی منفی در یک فرایند $AR(1)$ تاثیر قابل توجهی بر عملکرد نمودار کنترل شوهارت در مقایسه با حالت NID ایجاد نمی‌کند.

این مطلب درباره مقادیر اندک ضریب همبستگی مثبت نیز صادق است. تنها موردیکه تفاوت آن با سایر حالات کاملاً قابل توجه است مربوط به وجود ضریب همبستگی مثبت با مقدار زیاد در مشاهدات فرایند می‌باشد ($\phi > 0.8$)، بطوریکه حساسیت نمودار شوهارت اصلاح شده به ازای ضریب همبستگی $\phi = +0.9$ جهت تشخیص شیفت در میانگین فرایند به میزان قابل توجهی نسبت به حالت NID ($\phi = 0$) کمتر است.

روابطی که پیش از این به آن اشاره شده است مقدار واریانس واقعی فرایند را تخمین زد. بنابراین در ادامه فرض می‌شود ساختار خودهمبستگی مشاهدات در قالب مدل $AR(1)$ شناسایی گردیده و مقدار واریانس فرایند نیز از طریق محاسبه ضریب همبستگی مشاهدات در دسترس است.

برای ترسیم نمودار کنترل X برای مشاهدات مذکور همچنان یک سؤال مهم بدون پاسخ باقی مانده است. آیا از نمودار شوهارت که با فرض استقلال مشاهدات ترسیم می‌شود می‌توان برای مجموعه مشاهدات گردآوری شده از یک فرایند خود همبسته نیز استفاده نمود؟ برای این منظور از شاخص متوسط طول دنباله^۱ (ARL) برای ارزیابی عملکرد نمودار X هنگام کنترل میانگین یک فرایند $AR(1)$ استفاده می‌کنیم.

در این مقاله مقدار ARL به ازای مقادیر مختلف ضریب همبستگی از -0.9 تا $+0.9$ با استفاده از شبیه سازی و با ۲۰۰۰ بار تکرار محاسبه گردیده است.

فرض کنید مشاهدات خودهمبسته از مدل $AR(1)$ مطابق رابطه ۱ پیروی می‌کنند. در نظر بگیرید که میانگین مشاهدات در پیروی τ از مقدار اولیه μ به مقدار $\mu + \delta\sigma_x$ شیفت پیدا کند. بنابراین برای $t \geq \tau + 1$ مدل فرایند عبارتست از:

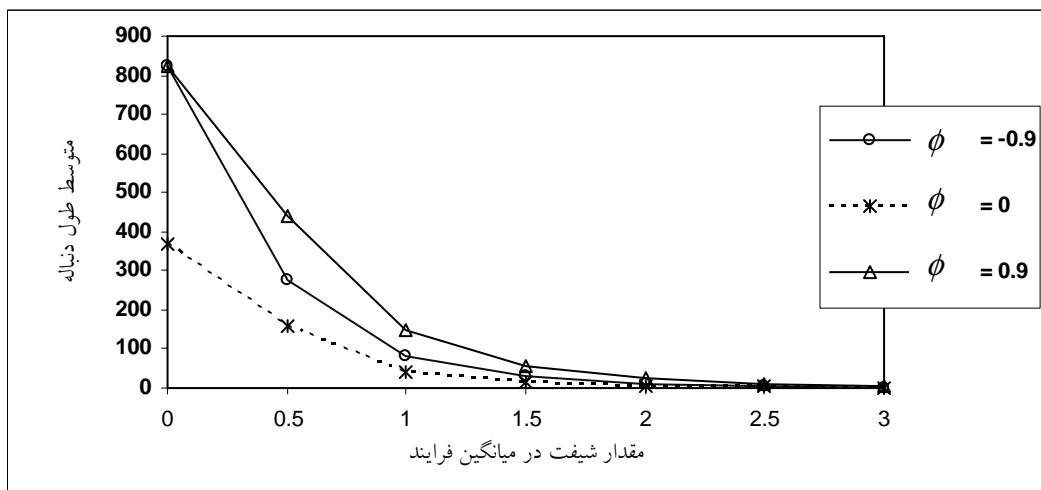
$$x_t - \mu - \delta\sigma_x = \phi(x_{t-1} - \mu - \delta\sigma_x) + \varepsilon_t \quad (5)$$

در اینجا با پذیرش این موضوع که انحراف معیار فرایند به کمک یک برآوردکننده نارایب برآورد می‌شود برای تصمیم‌گیری درباره وضعیت فرایند موقعیت x_t را با حدود کنترل $\mu \pm 3\sigma_x$ مقایسه می‌کنیم. با این توصیف در شکل ۱ مقادیر متوسط طول دنباله به ازای مقادیر همبستگی -0.9 ، 0 و $+0.9$ ترسیم شده است.

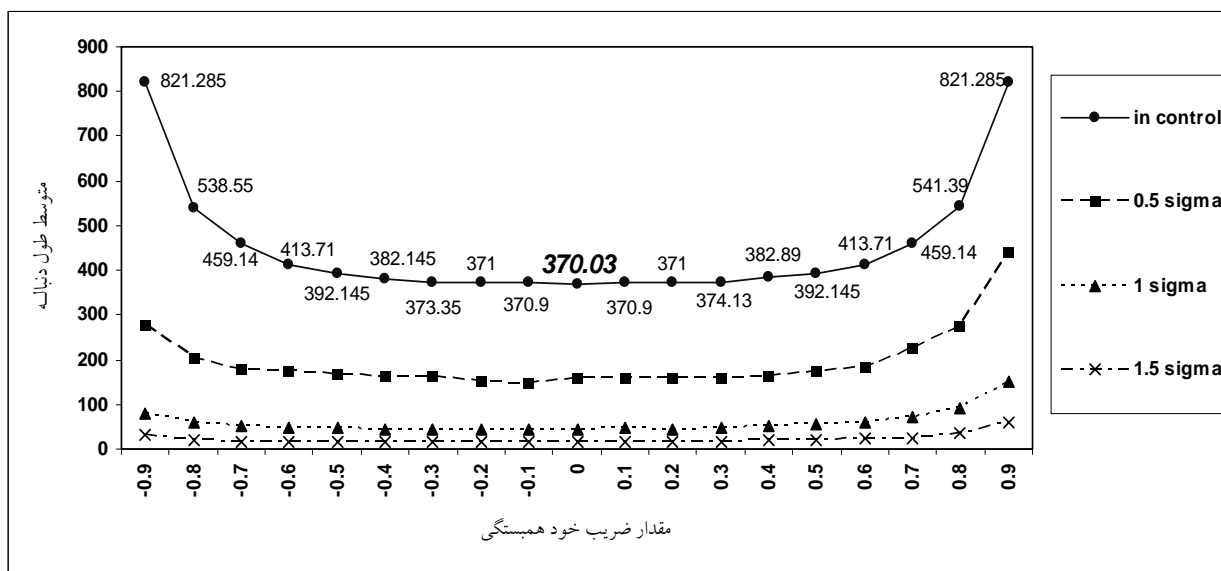
از آنجا که مقدار ARL برای شیفت مثبت و منفی قرینه یکسان است محور افقی در شکل ۱ به ازای اندازه مطلق δ رسم شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود مقدار ARL در وضعیت تحت کنترل برای $\phi = +0.9$ و $\phi = -0.9$ بمراتب از ARL مربوط به حالت $\phi = 0$ بیشتر است.

نکته دیگری که با توجه به شکل ۱ جلب توجه می‌کند آنست که نمودار مربوط به فرایند $AR(1)$ با $\phi = -0.9$ در مقابل تشخیص شیفت در میانگین فرایند بمراتب از نمودار مربوط به وضعیت $\phi = 0.9$ حساستر است. جهت بررسی بهتر این دو نکته، توجه خواننده به شکل ۲ جلب می‌شود که در آن مقادیر ARL برای حالت تحت کنترل ($\delta = 0$) در کنار سه وضعیت خارج از کنترل $\delta = 0.5$ ، $\delta = 1$ و $\delta = 1.5$ به ازای مقادیر مختلف ϕ ترسیم شده است.

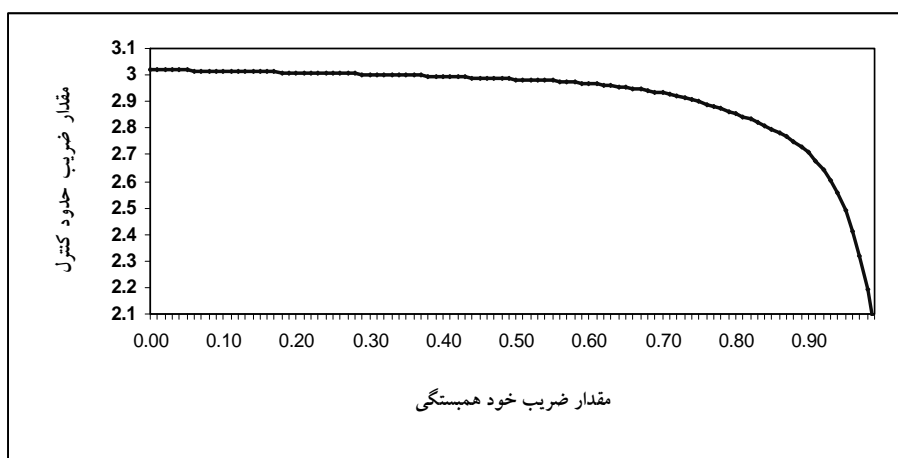
¹ Average run length



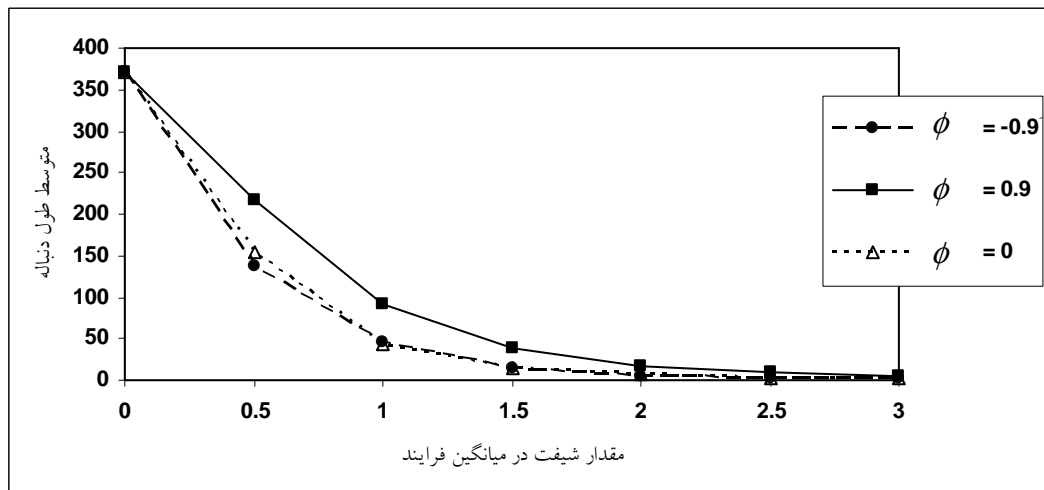
شکل ۱. ARL برای نمودار X با حدود سه انحراف معیار (انحراف معیار واقعی فرایند)



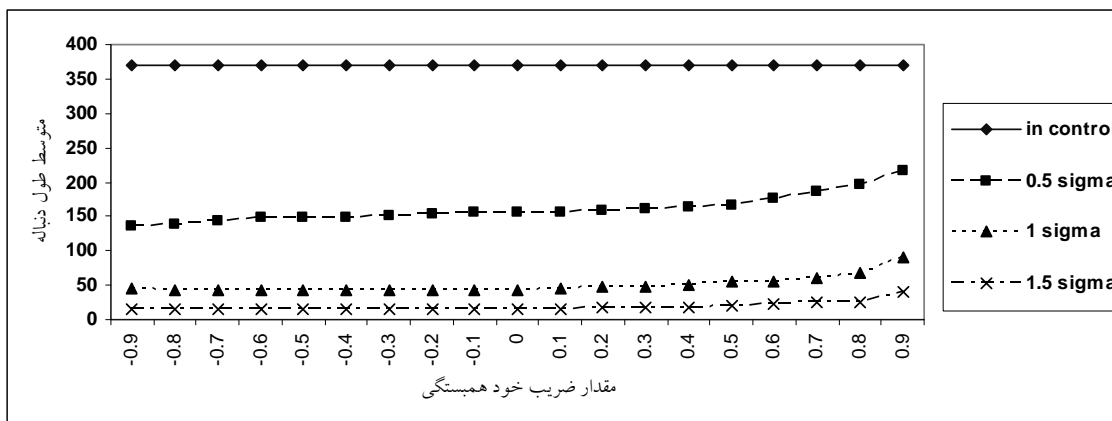
شکل ۲. ARL برای نمودار X با حدود سه انحراف معیار واقعی در چهار وضعیت به ازای مقدار ϕ



شکل ۳. مقدار ضریب حدود کنترل برای نمودار شوهرت اصلاح شده بمنظور تحقق مقدار ۳۷۰ برای ARL تحت کنترل



شکل ۴. ARL برای نمودار X با حدود $\mu \pm h\sigma_x$ (انحراف معیار واقعی فرایند)



شکل ۵. ARL برای نمودار X با حدود $\mu \pm h\sigma_x$ در چهار وضعیت به ازای مقدار ϕ

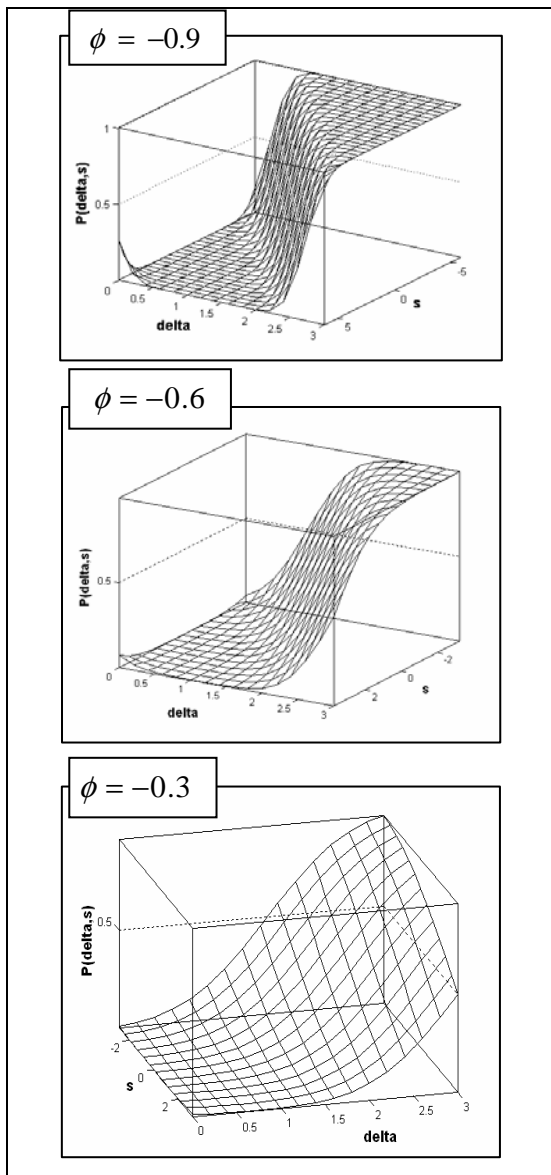
در پایان این قسمت، تفاوت یک فرایند NID و فرایند خودهمبسته را از نگاهی دیگر مورد تاکید قرار می‌دهیم. در وضعیت تحت کنترل برای یک فرایند NID ، تفاوتی ما بین تغییرپذیری کوتاه مدت و بلندمدت فرایند وجود ندارد و از همین رو با استفاده از آماره \overline{MR}/d_2 یا \overline{R}/d_2 که نماینده تغییرات کوتاه مدت فرایند می‌باشد برای کنترل تغییرپذیری بلندمدت فرایند بهره گرفته می‌شود ($\mu \pm 3\overline{R}/d_2$ برای $n \geq 2$ و $\mu \pm \overline{MR}/d_2$ برای $n = 1$). در حالیکه در فرایند خودهمبسته تغییرپذیری کوتاه مدت و بلندمدت فرایند یکسان نیست و حدود تصمیم برای چنین فرایندهایی باید تنها بر مبنای تغییرپذیری بلندمدت فرایند برآورد شود. بعبارت دیگر در حالتی که مشاهدات دچار خودهمبستگی هستند وضعیت مشخصه کیفی در هر لحظه از زمان به لحاظ واقع بودن در شرایط تحت کنترل متأثر از مشاهدات گذشته است.

در رابطه ۶، h_ϕ مقدار ضریب نمودار کنترل اصلاح شده را نشان می‌دهد که برای مقدار مشخص ϕ محاسبه شده است. همچنین $\Phi(\bullet)$ ، تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد را تعریف می‌کند. بر این اساس، با فرض $t \geq \tau + 1$ ، احتمال تشخیص شیفت در زمان t بر اساس موقعیت مشخصه کیفی در لحظه $t - 1$ برای مقادیر مختلف شیفت در میانگین فرایند در شکل ۶ ترسیم شده است. همانطور که انتظار می‌رفت احتمال مشاهده علامت خارج از کنترل در لحظه t برای حالت NID ($\phi = 0$)، به مقدار s

$$P_\phi(\delta, s) = P_\phi(|\phi s + (1 - \phi)\delta\sigma_x + \varepsilon_t| > h_\phi\sigma_x) = 1 - \Phi[h_\phi\sigma_x - \phi s - (1 - \phi)\delta\sigma_x] + \Phi[-h_\phi\sigma_x - \phi s - (1 - \phi)\delta\sigma_x] \quad (6)$$

برای $t - 1$ برابر با s باشد آنگاه مقدار آن در لحظه t از رابطه

را حذف نموده و نمودارهای کنترلی را برای باقیمانده‌های آن ترسیم نماییم.
مدلهای اتورگرسیو - میانگین متحرک^۱ (ARMA) طبقه نیرومندی از مدل‌های سری زمانی ایستا را در برمی‌گیرند که به صورت مؤثر جهت مدلسازی انواع فرایندهای خودهمبسته مورد استفاده واقع می‌شود.



شکل ۶. احتمال مشاهده یک علامت خارج از کنترل در مشاهده بعدی از یک فرایند AR(1) بعنوان تابعی دو متغیره از مقدار شیفت در میانگین فرایند (δ) و مقدار واقعی مشاهده فعلی ($s \in (\mu - h_\phi \sigma_x, \mu + h_\phi \sigma_x)$) که به ازای مقادیر مختلف ϕ محاسبه شده است

وابسته نیست. در صورتیکه با مقدار ضریب همبستگی منفی در فرایند مواجه باشیم آنگاه برای مقادیر $s < \mu$ احتمال بروز علامت خارج از کنترل در پریود بعدی از مقدار نسبتاً زیادی برخوردار می‌باشد.

برای تفسیر این پدیده باید توجه کرد که اگر مقدار x_{t-1} از میانگین فرایند کمتر باشد، وجود ضریب همبستگی منفی سبب می‌شود که مشاهده بعدی یعنی x_t با احتمال زیادی از مقداری بیش از میانگین برخوردار باشد. این امر به همراه وجود یک شیفت مثبت در میانگین فرایند بالطبع احتمال بروز علامت خارج از کنترل را افزایش خواهد داد.

نکته دیگری که با مشاهده این نمودارها بویژه نمودارهای مربوط به $\phi = \pm 0.9$ عجیب به نظر می‌رسد آنست که هنگامیکه در میانگین فرایند شیفت رخ نداده است ($\delta = 0$)، با نزدیک شدن مقدار s به مقادیر حدود کنترل بالا یا پایین نمودار $(\mu \pm h_\phi \sigma_x)$ احتمال وقوع علامت خارج از کنترل در مشاهده بعدی بطور قابل توجهی افزایش می‌یابد.

مهمترین مسئله‌ای که در مجموعه نمودارهای شکل ۶ به نظر می‌رسد آنست که بطور کلی بر خلاف حالت تحت کنترل که احتمال خطا نوع اول نسبت به مقدار ضریب همبستگی متقارن می‌باشد، احتمال تشخیص شیفت در میانگین فرایند برای وضعیت $\phi < 0$ بیش از وضعیت $\phi > 0$ خواهد بود. علت این امر را با

$$\text{بازنویسی عبارت } (1 - \phi)\delta\sigma_x \text{ در رابطه ۶ بصورت } \frac{\sqrt{1 - \phi}}{\sqrt{1 + \phi}}\delta\sigma_x$$

می‌توان توضیح داد. بدین ترتیب مشاهده می‌شود که با نزدیک شدن ϕ به سمت عدد یک، مقدار عبارت مذکور به سمت صفر میل می‌کند. در سوی مقابل، با گرایش ϕ به سوی عدد منفی یک، مقدار این عبارت به شدت افزایش می‌یابد.

بدین ترتیب طبیعی به نظر می‌رسد احتمال تشخیص شیفت هنگامیکه ضریب خود همبستگی به سمت یک میل می‌کند ($\phi \rightarrow 1$)، بسیار کمتر از حالتی باشد که این ضریب به سمت منفی یک میل می‌کند ($\phi \rightarrow -1$).

۲-۳. استفاده از مدل‌های سری زمانی اتورگرسیو- میانگین متحرک و ترسیم نمودار باقیمانده

استفاده از روشهای سری زمانی هنگامی مورد توجه قرار می‌گیرد که همبستگی مشاهدات یک ویژگی طبیعی برای فرایند به شمار می‌رود و همچنین امکان کاهش تناوب نمونه‌گیری وجود ندارد. در رویکردهای مبتنی بر مدل ابتدا با استفاده از یک مدل سری زمانی مناسب، ساختار خودهمبستگی مشاهدات فرایند مدل می‌شود. در واقع به کمک این مدل، خواهیم توانست خودهمبستگی در داده‌ها

^۱Auto regressive-moving average

$$x_t = \mu(1 - \phi_1 - \dots - \phi_p) + \phi_1 x_{t-1} + \dots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (7)$$

بطوریکه در رابطه فوق، x_{t-i} مشخصه کیفی موردنظر در زمان $t-i$ ، میانگین فرآیند، μ ضرایب مدل اتورگرسیو، θ_j ضرایب مدل میانگین متحرک و ε_{t-i} خطای تصادفی در زمان $t-i$ است. فرض می‌شود خطاها ضمن برخورداری از شرایط NID دارای میانگین صفر و انحراف معیار σ_ε می‌باشند. فرآیند اتورگرسیو از درجه p ، $AR(p)$ ، که با رابطه

$$x_t = \mu(1 - \phi_1 - \dots - \phi_p) + \phi_1 x_{t-1} + \dots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t \quad (8)$$

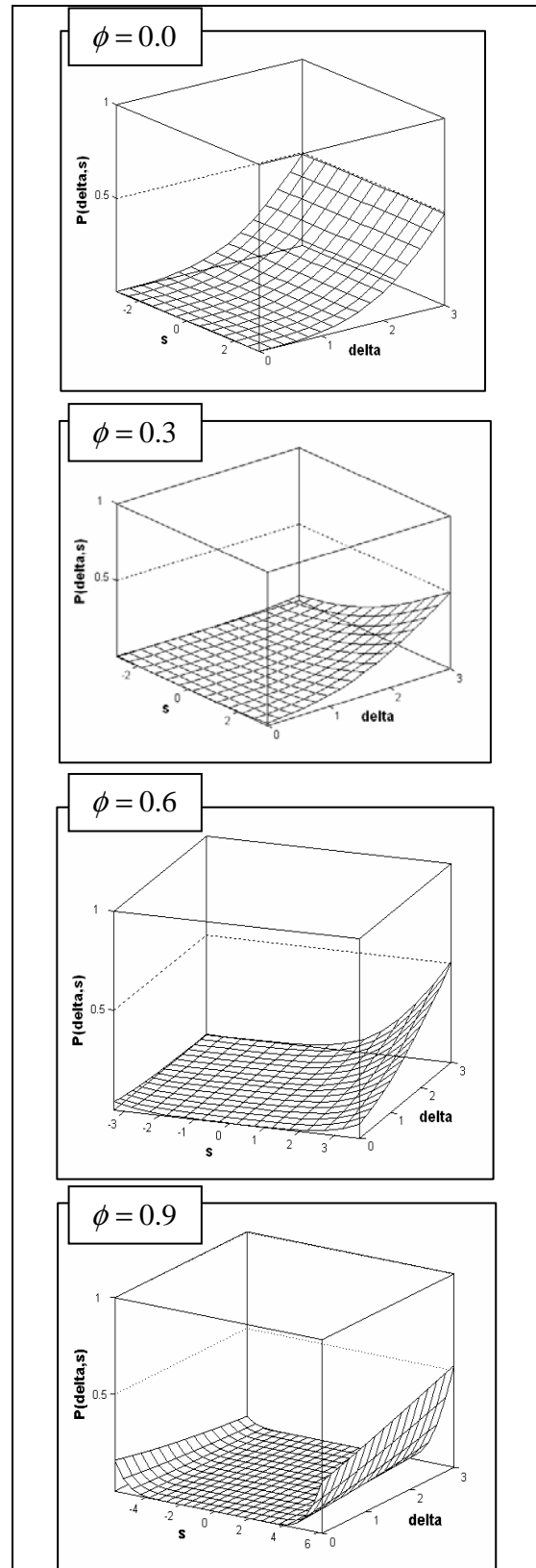
و فرآیند میانگین متحرک از درجه q ، $MA(q)$ ، که توسط رابطه

$$x_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (9)$$

نمایش داده می‌شوند، حالت‌های خاصی از یک فرآیند $ARMA(p, q)$ محسوب می‌شوند.

باکس و جنکینز جهت تهیه مدل مناسب برای فرآیندهای خودهمبسته از یک روش سه مرحله‌ای شامل تهیه یک مدل آزمایشی از طریق تجزیه و تحلیل داده‌های تاریخی، تخمین پارامترهای نامعلوم مدل و نهایتاً آزمون خطا جهت بررسی شایستگی مدل استفاده می‌کنند [۷]. تشخیص آزمایشی مدل سری تابع خودهمبستگی $ARMA$ از طریق بررسی تابع خودهمبستگی ACF و تابع خودهمبستگی جزئی $PACF$ صورت می‌گیرد. پس از اینکه یک مدل سری زمانی بطور آزمایشی مشخص شد، تخمین‌های کمترین مربعات پارامترهای مدل تهیه می‌شوند. فرض کنید $\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_p, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_q$ برآوردهای پارامترهای نامعلوم یک مدل $ARMA(p, q)$ باشند که برای پیش‌بینی مشاهده در زمان t که با \hat{x}_t نشان داده می‌شود بکار برده می‌شوند.

اگر $\hat{x}_t(t-1)$ پیش‌بینی مشاهده برای پریود t باشد که در پریود $t-1$ صورت می‌گیرد آنگاه $R_t = x_t - \hat{x}_t(t-1)$ باقیمانده پیش‌بینی یک پریودی نامیده می‌شود. چنانچه مدل برازش شده به مشاهدات از شایستگی برخوردار باشد، باقیمانده‌های حاصل از پیش‌بینی، متغیرهای تصادفی مستقلی خواهند بود که از یک توزیع احتمال پایدار با میانگین صفر و انحراف معیار σ_ε پیروی می‌کنند. بدین ترتیب نمودارهای شوهارت را می‌توان براحتی برای باقیمانده‌های مدل مورد استفاده قرار داد. وجود نقاط خارج از کنترل یا الگوهای غیرتصادفی در این نمودارها نشان‌دهنده آن خواهد بود که یا مقادیر پارامترهای مدل تغییر یافته و یا مقدار مشاهده x_t خارج از کنترل است. الوان و رابرتز نمودار کنترل برای باقیمانده‌های مدل را نمودار انحراف با دلیل SCC می‌نامند [۳]. آنها



شکل ۶. (ادامه)

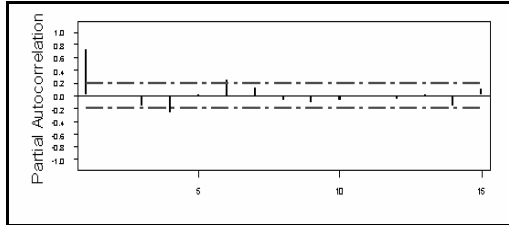
یک مدل ترکیبی اتورگرسیو - میانگین متحرک از درجه (p, q) توسط رابطه زیر نشان داده می‌شود:

¹Autocorrelation function

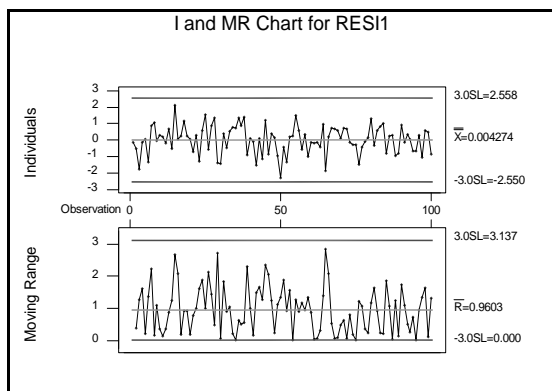
²Partial autocorrelation function

³Special cause chart

نمودارهای کنترل برای باقیمانده‌های مدل فوق در شکل ۱۱ رسم شده است. همانطور که مشاهده می‌شود در این نمودارها هیچ علامت خارج از کنترلی مشاهده نمی‌شود و این مسئله از خطای نوع اول نسبتاً زیاد در نمودار شکل ۸ حکایت دارد.



شکل ۱۰. تابع خود همبستگی جزئی برای مشاهدات شکل ۸



شکل ۱۱. نمودارهای کنترل شوهارت برای باقیمانده‌های حاصل از برازش مدل رابطه (۱۰) به مشاهدات فرایند (شکل ۸)

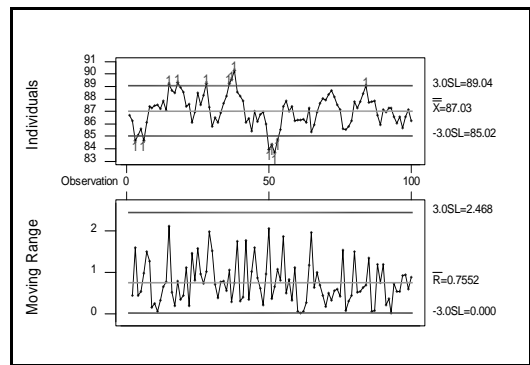
محاسبه ARL برای نمودار باقیمانده‌ها هنگامیکه در میانگین فرایند $AR(1)$ شیفت رخ دهد چندان مشکل نیست. بار دیگر رابطه ۱ مربوط به یک فرایند $AR(1)$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید مقدار میانگین از مقدار اولیه μ_0 به مقداری نظیر $\mu_1 = \mu_0 + a$ تغییر نماید.

چنانچه این تغییر در فاصله زمانی $t-1$ تا t رخ دهد، میانگین باقیمانده‌ها از مقدار صفر به مقدار a منتقل می‌شود و اگر این تغییر پیش از زمان $t-1$ اتفاق بیفتد، میزان تغییر در میانگین باقیمانده‌ها برابر با $(1-\phi)a$ است.

به بیان دیگر چنانچه میانگین فرایند $AR(1)$ در زمان τ از مقدار تحت کنترل μ_0 به وضعیت خارج از کنترل $\mu_1 = \mu_0 + a$ تغییر یابد آنگاه می‌توان از طریق رابطه ۱۱ مقادیر متصور برای میانگین باقیمانده‌ها را تعریف نمود [۹]:

$$E(R_t) = \begin{cases} 0 & ; T > t \\ a & ; t-1 < T \leq t \\ (1-\phi)a & ; T \leq t-1 \end{cases} \quad (11)$$

پیشنهاد می‌کنند که در یک فرآیند خودهمبسته، نمودار SCC در کنار نمودار انحرافات تصادفی^۱ (CCC) استفاده شود. نمودار CCC ، مشاهدات اصلی فرآیند را در کنار مقادیر پیش‌بینی حاصل از مدل نشان می‌دهد. جهت آشنایی بیشتر با رویکرد استفاده از مدل‌های سری زمانی، نورالسنا و سقایی مراحل کار را در قالب شکل ۷ نشان می‌دهند [۸]. به عنوان یک مثال از ترسیم نمودار باقیمانده، فرایندی را در نظر بگیرید که در شکل ۸ نمودارهای کنترل $MR - X$ برای ۱۰۰ مشاهده از آن نشان داده شده است. شکل ۹ نمودار ACF متعلق به این مشاهدات و شکل ۱۰ نمودار $PACF$ را برای آنها ترسیم کرده است. پس از تجزیه و تحلیل نمودارهای مذکور بر اساس خطوط راهنمای باکس و جنکینز، مدل سری زمانی شناسایی گردیده و پارامترهای مدل تخمین زده می‌شود.

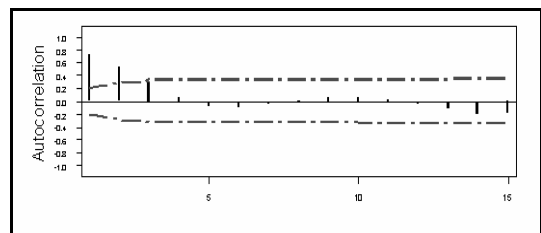


شکل ۸. نمودار کنترل مقادیر انفرادی مشاهدات انفرادی برای تعداد ۱۰۰ مشاهده از یک فرایند $AR(1)$ با ضریب خود همبستگی تقریبی $\phi = 0.7$

با استفاده از نرم افزار Minitab مدل سری زمانی برای این مشاهدات بصورت

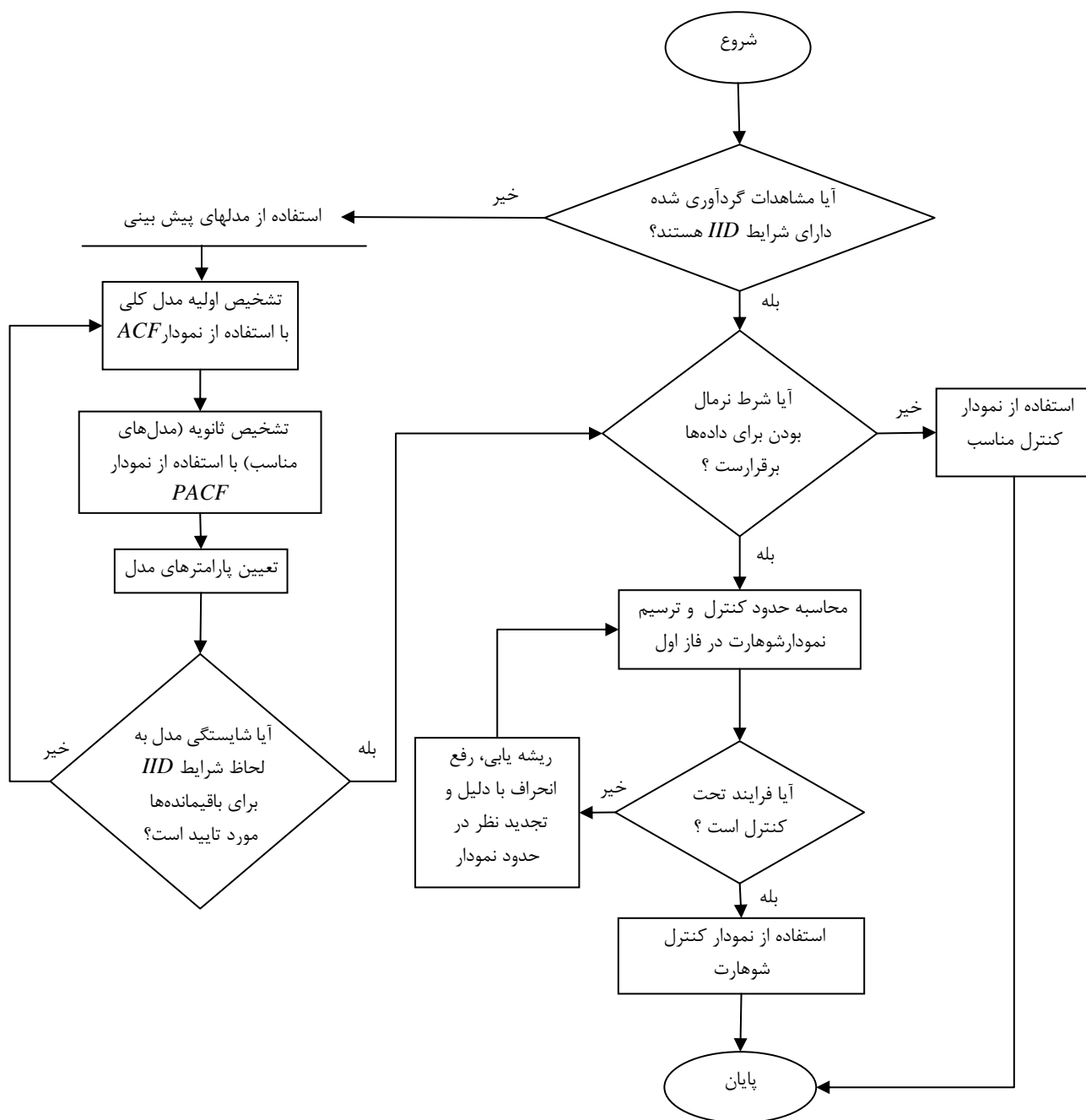
$$x_t = 22.0952 + 0.746x_{t-1} \quad (10)$$

برآورد شده است. پس از محاسبه باقیمانده‌های مدل، حاصل از برازش مدل ۱۰ به مشاهدات، برقراری شرایط NID که بیانگر کفایت مدل می‌باشد در مورد باقیمانده‌ها بررسی شده و شایستگی مدل به اثبات رسیده است.



شکل ۹. تابع خود همبستگی برای مشاهدات شکل ۸

¹ Common cause chart



شکل ۷. بررسی فرضیات ترسیم نمودار کنترل شوهارت و نحوه بکارگیری مدل‌های سری زمانی جهت ترسیم نمودار مقادیر باقیمانده

دنباله برای نمودار باقیمانده در یک فرایند $AR(1)$ از رابطه ۱۲ حاصل می‌شود:

$$ARL_R = 1 + \frac{(1 - P^{(1)})}{P^{(2)}} \quad (12)$$

بطوریکه در رابطه فوق احتمال‌های $P^{(1)}$ و $P^{(2)}$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

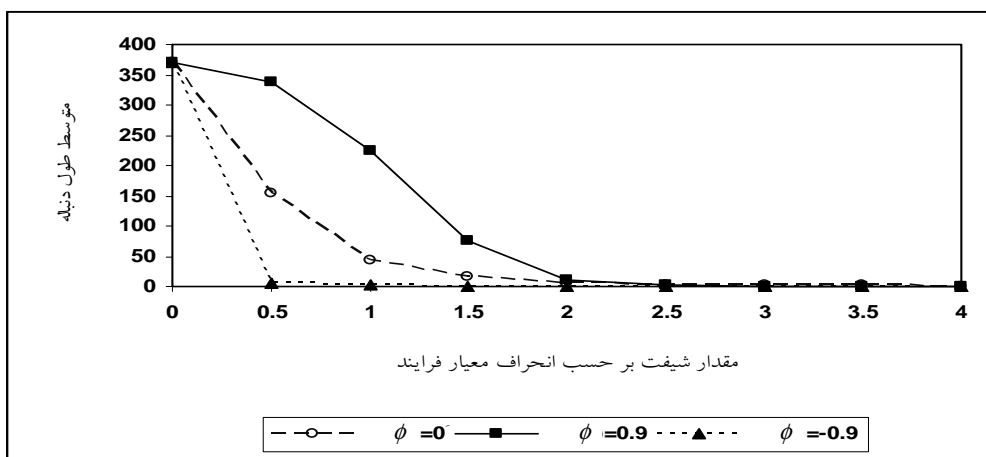
$$P^{(1)} = 1 - \Phi\left(3 - \frac{a}{\sigma_\epsilon}\right) + \Phi\left(-3 - \frac{a}{\sigma_\epsilon}\right)$$

$$P^{(2)} = 1 - \Phi\left(3 - \frac{a(1-\phi)}{\sigma_\epsilon}\right) + \Phi\left(-3 - \frac{a(1-\phi)}{\sigma_\epsilon}\right) \quad (13)$$

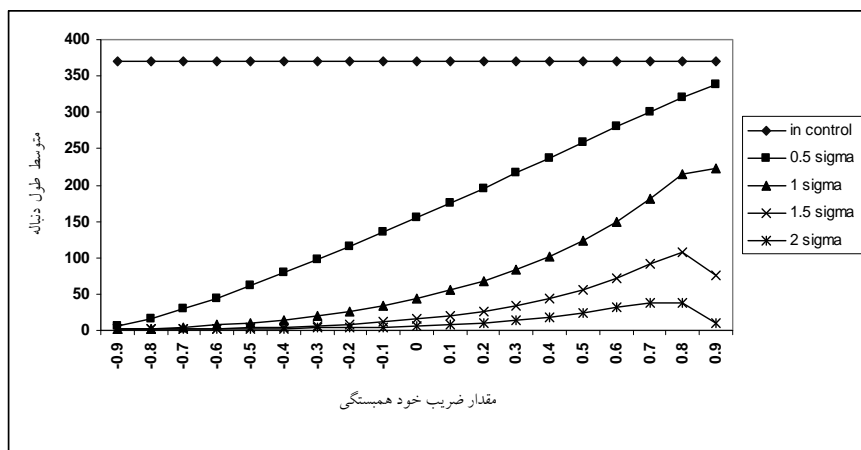
رابطه ۱۱ این موضوع را بیان می‌کند که استفاده از نمودار باقیمانده‌ها بمنظور شناسایی شیف‌ت در میانگین فرآیند $AR(1)$ ، بویژه در مواردی که میزان خودهمبستگی به سمت یک میل می‌کند، چندان اثربخش نیست چراکه اختلاف ایجاد شده در میانگین فرآیند پس از کاهشی با نسبت $(1 - \phi)$ به نمودار باقیمانده‌ها منتقل خواهد شد. پس اگر میانگین فرآیند $AR(1)$ به اندازه ضریبی از انحراف معیار فرایند نظیر مقدار $\delta\sigma_x$ تغییر پیدا کند، آنگاه میانگین باقیمانده‌ها پس از ایجاد تغییر $(\tau + 1 \leq t)$ به اندازه $\delta\sigma_\epsilon \sqrt{(1-\phi)/(1+\phi)}$ جابجا خواهد شد. مقدار متوسط طول

کمک شکل ۱۳ آشکار می‌شود آنست که بنظر می‌رسد اگر در فرایند $AR(1)$ داشته باشیم $\phi \rightarrow 1$ آنگاه روند صعودی مقدار ARL متوقف شده و به یک روند کاهشی بدل می‌شود. به عنوان نمونه در ستون آخر جدول ۳ ملاحظه می‌شود که هنگامیکه قصد بررسی تغییری به اندازه یک انحراف معیار در میانگین فرایند وجود داشته باشد روند افزایشی متوسط طول دنباله به ازای ضریب همبستگی $\phi = 0.87$ متوقف و پس از آن به یک روند کاهشی تبدیل می‌شود به گونه‌ای که حتی به ازای مقادیر همبستگی $\phi = 0.98$ عملکرد نمودار باقیمانده‌ها بسیار بهتر از وضعیت NID است.

در شکل ۱۲ مقدار متوسط طول دنباله برای ضرایب خودهمبستگی $\phi = 0.9$ ، $\phi = -0.9$ و وضعیت NID آورده شده است. همانطور که انتظار داشتیم و در این شکل نیز ملاحظه می‌شود عملکرد نمودار باقیمانده برای همبستگی مثبت، بویژه جهت تشخیص تغییرات کوچک تا متوسط در میانگین فرایند، نسبت به وضعیت NID به مراتب ضعیفتر می‌باشد. با بررسی شکل ۱۳ می‌توان بهبود ARL را به هنگام وجود مقدار ضریب خودهمبستگی منفی در یک فرایند $AR(1)$ بوضوح مشاهده نمود. بعبارت دیگر چنانچه وجود ضریب خود همبستگی منفی با تاخیر یک به اثبات رسیده باشد استفاده از نمودار باقیمانده‌ها جهت کنترل فرایند انتخاب بسیار مناسبی است. نکته جالب دیگری که به



شکل ۱۲. مقادیر متوسط طول دنباله برای نمودار باقیمانده‌ها در فرایند $AR(1)$



شکل ۱۳. مقادیر متوسط طول دنباله برای نمودار باقیمانده‌ها در فرایند $AR(1)$ برای وضعیت تحت کنترل و حالت‌های خارج از کنترل

به ازای مقادیر همبستگی منفی، احتمال تشخیص شیفت توسط مشاهدات دوم به بعد در نمودار باقیمانده از احتمال مربوطه به ازای اولین مشاهده بیشتر است در حالیکه این موضوع در مورد ضریب همبستگی مثبت به شکل عکس برقرار است تا جائیکه کاهش قابل توجه در مقادیر ARL را نیز موجب می‌گردد.

در واقع باید به این مسئله اشاره شود که اگر چه بنابر توضیحات ارائه شده احتمال تشخیص شیفت در میانگین فرایند $AR(1)$ توسط نمودار باقیمانده‌ها برای مقادیر ϕ مثبت کم است (به ستون چهارم جدول ۳ توجه کنید)، با این وجود احتمال تشخیص توسط اولین باقیمانده پس از وقوع شیفت با افزایش ضریب خودهمبستگی به سمت عدد یک میل می‌کند (ستون سوم از جدول ۳).

جدول ۳. بررسی تاثیر شیفیت به اندازه یک انحراف معیار در میانگین فرایند $AR(1)$ ، $(\mu_1 = \mu_0 + \sigma_x)$ در عملکرد نمودار باقیمانده‌ها با حدود $\pm 3\sigma_e$ به ازای مقادیر مختلف خود همبستگی

ϕ	$\mu_1 = \mu_0 + \sigma_x$	احتمال تشخیص تغییر توسط اولین مشاهده پس از ایجاد شیفیت	احتمال تشخیص توسط مشاهدات بعدی	ARL
-0.9	2.29	0.24015	0.91291	1.83
-0.8	1.67	0.09122	0.50001	2.82
-0.6	1.25	0.04007	0.15866	7.05
-0.3	1.05	0.02551	0.05080	20.18
0	1.00	0.02278	0.02278	43.89
0.3	1.05	0.02551	0.01181	83.48
0.6	1.25	0.04007	0.00644	149.99
0.8	1.67	0.09122	0.00426	214.34
0.85	1.90	0.13531	0.00382	227.25
0.87	2.03	0.16558	0.00366	229.20
0.9	2.29	0.24015	0.00342	223.29
0.92	2.55	0.32692	0.00327	207.11
0.95	3.20	0.58027	0.00305	138.83
0.96	3.57	0.71615	0.00297	96.44
0.97	4.11	0.86725	0.00290	46.71
0.98	5.03	0.97858	0.00283	8.56
0.99	7.09	0.99998	0.00277	1.01

جدول ۴. محاسبه نقطه تغییر جهت نمودار ARL به

ازای مقدار مشخص شیفیت در میانگین فرایند

$$(\mu_1 = \mu_0 + k\sigma_x)$$

0.75	0.8944
1	0.8713
1.5	0.8186
2	0.7547
2.5	0.6801
3	0.5945
3.5	0.4917
4	0.3522
4.5	0.1407

بطور کلی به نظر می‌رسد با توجه به مطالعه عملکرد نمودار شوهارت اصلاح شده در قسمت قبل، چنانچه در حضور خودهمبستگی مثبت نسبتاً زیاد ($0.75 \leq \phi \leq 0.9$)، قصد تشخیص شیفیت‌های کوچک تا متوسط در یک فرایند وجود داشته باشد، با اینکه بکارگیری نمودار شوهارت اصلاح شده نسبت به نمودار باقیمانده‌ها کاملاً توجیه پذیر است اما هر دو نمودار در مقایسه با وضعیت NID از یک ضعف نسبی برخوردارند. به هر صورت شکل ۱۵ فرایند تصمیم برای انتخاب نمودار مناسب را از بین دو گزینه نمودار باقیمانده و نمودار شوهارت اصلاح شده در شرایط خود همبستگی نشان می‌دهد.

در جدول ۴ با در نظر گرفتن مقدار شیفیت در میانگین، مقدار ضریب خود همبستگی خاصی که نقطه تغییر جهت روند ARL محسوب می‌شود محاسبه شده است. در شکل ۱۴ نمودار باقیمانده‌ها و نمودار شوهارت اصلاح شده به ازای مقادیر مختلف ضریب خود همبستگی با یکدیگر مقایسه شده است.

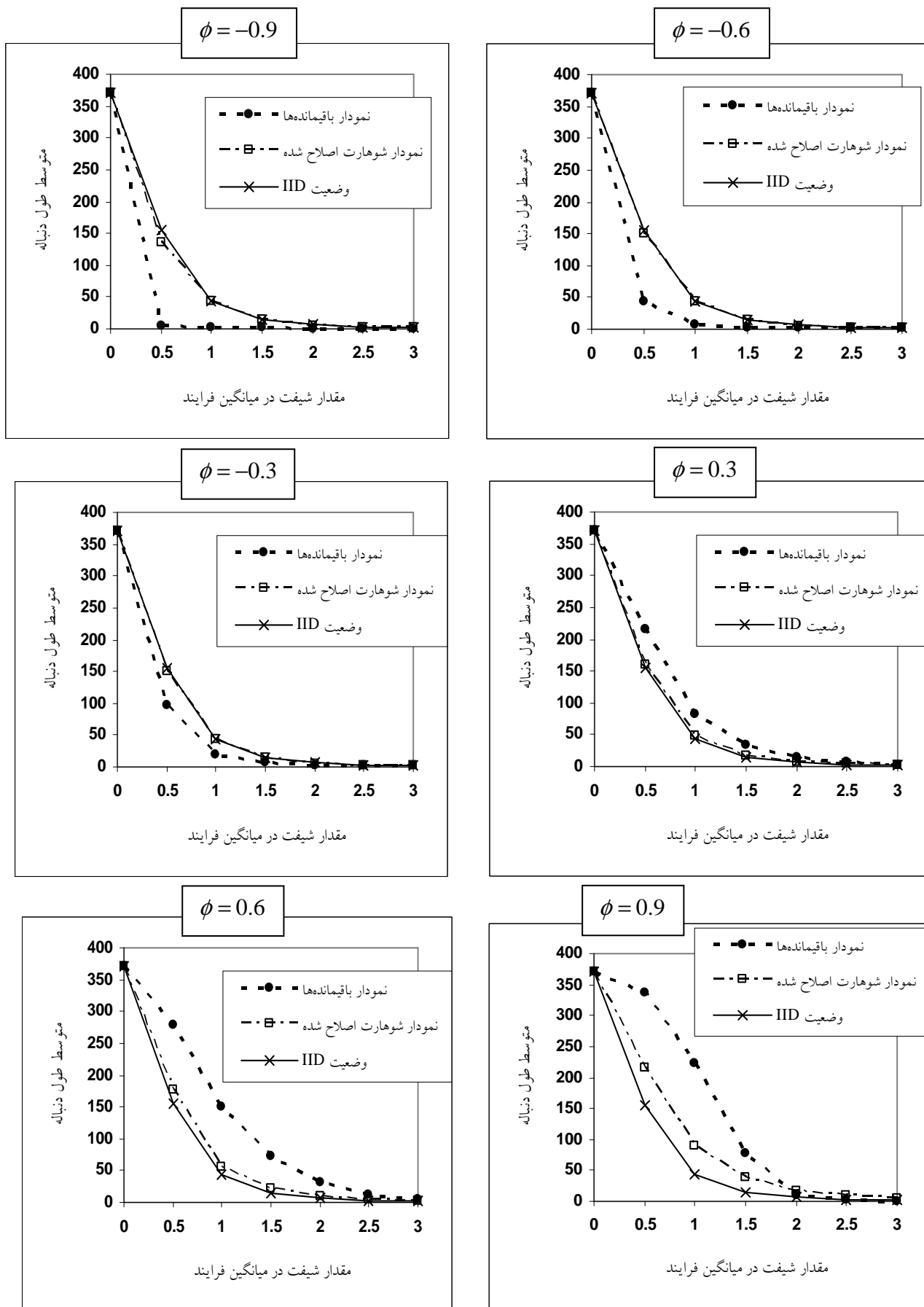
بطور کلی هنگامیکه ضریب همبستگی منفی وجود داشته باشد عملکرد نمودار باقیمانده‌ها بهتر از نمودار شوهارت اصلاح شده است. به خصوص هنگامیکه $-1 \rightarrow \phi$ ، این تفاوت نمایان‌تر می‌شود. اما هنگامیکه مقدار ضریب خودهمبستگی مثبت است عملکرد نمودار باقیمانده‌ها نسبت به نمودار شوهارت اصلاح شده به میزان قابل توجهی تضعیف می‌شود. البته باید این نکته را مدنظر قرار داد که با نزدیک شدن مقدار ϕ به مقدار $+1$ ، قدرت نمودار باقیمانده‌ها مجدداً بهبود می‌یابد. بعنوان مثال هنگامیکه $\phi = 0.9$ باشد قدرت تشخیص تغییرات ۲،۵ یا ۳ انحراف معیار حتی از وضعیت NID نیز بهتر است (در شکل ۱۴ نمودار مربوط به $\phi = 0.9$ را مشاهده کنید).

جدول ۴. محاسبه نقطه تغییر جهت نمودار ARL به

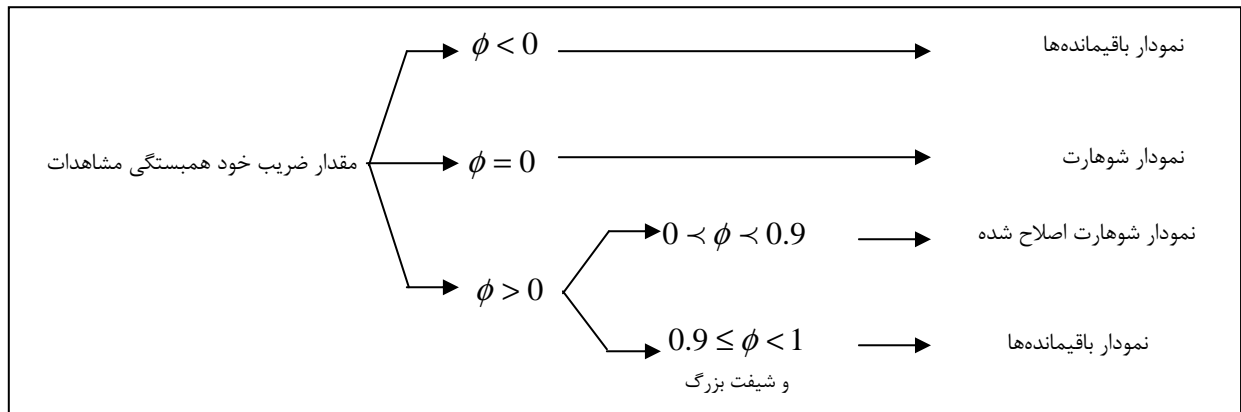
ازای مقدار مشخص شیفیت در میانگین فرایند

$$(\mu_1 = \mu_0 + k\sigma_x)$$

k	نقطه تغییر جهت
0.1	0.9468
0.25	0.9373
0.5	0.9164



شکل ۱۴. مقایسه نمودار باقیماندهها با نمودار شوهارت اصلاح شده به ازای مقادیر مختلف ضریب همبستگی ϕ



شکل ۱۵. تصمیم‌گیری برای انتخاب نمودار مناسب از بین نمودار باقیمانده‌ها و نمودار شوهارت اصلاح شده در فرایند $AR(1)$

مقدار مناسبی از پارامتر λ که از طریق کمینه‌سازی مجموع مربعات خطای R_t حاصل شده است، یک پیش‌بینی‌کننده یک‌پریودی با تقریبی عالی فراهم می‌سازد.

در نتیجه انتظار داریم بسیاری از فرایندها که از مدل‌های سری زمانی درجه اول پیروی می‌کنند یا به زبان ساده روند تغییرات در آنها به کندی انجام می‌شود، با تقریب خوبی توسط آماره $EWMA$ مدل‌سازی شوند. همانند الوان و رابرتز، برای ایجاد سهولت در تفسیر و تعبیر روندهای موجود در مشاهدات، مونته‌گمری و مسترآنجلو نیز ترسیم نمودار کنترل برای مقادیر خطای یک‌پریودی را در کنار نمودار دنباله^۲ که شامل مشاهدات اصلی فرایند است توصیه کرده‌اند [۳].

بعنوان یک نمونه، از این روش برای ترسیم نمودار کنترل برای ۱۰۰ مشاهده از فرایند خودهمبسته با مدل

$$x_t = 0.7x_{t-1} + \varepsilon_t \quad (۱۶)$$

استفاده می‌کنیم. برای تعیین مقدار پارامتر λ از روش کمینه‌سازی مربعات خطا استفاده شده است. نمودار مربوطه در شکل ۱۶ ترسیم شده است. جهت انجام محاسبات از ماژول Solver در نرم افزار EXCEL بهره گرفته شده است. همانطور که مشاهده می‌شود کمترین مقدار مربعات خطا به ازای $\lambda = 0.9$ حاصل شده است. شکل ۱۷ نمودار کنترل باقیمانده‌های حاصل از مدل $EWMA$ را بر مبنای $\lambda = 0.9$ نشان می‌دهد. این نمودار هیچ علامت خارج از کنترلی را نشان نمی‌دهد. باید خاطر نشان ساخت که می‌توان اطلاعات حاصل از نمودار باقیمانده‌ها و نمودار دنباله را برای سهولت در بررسی وضعیت فرایند، در قالب یک نمودار واحد ترکیب نمود. چنانچه مقادیر خطای پیش‌بینی یک‌پریودی (باقیمانده‌های مدل)، R_t ، از توزیع نرمال برخوردار باشند آنگاه حدود کنترل سه انحراف معیار برای آن در رابطه ۱۷ صدق خواهد نمود:

$$P(-3\sigma_\varepsilon \leq R_t \leq 3\sigma_\varepsilon) = 0.9973 \quad (۱۷)$$

۳-۲-۳. استفاده از مدل تقریبی میانگین متحرک موزون نمایی ($EWMA$)

مدل‌بندی سری زمانی بر مبنای مدل‌های باکس جنکینز، غالباً کاری وقت‌گیر و مشکل محسوب می‌شود. مونته‌گمری و مسترآنجلو روشی تقریبی برای مدل‌سازی فرایند خودهمبسته براساس استفاده از آماره $EWMA$ پیشنهاد کرده‌اند که ترسیم نمودار باقیمانده‌ها را تسهیل نموده است [۱۰]. اگر $\hat{X}_{t+1}(t)$ یک پیش‌بینی برای مشاهده در پریود $t+1$ باشد که در پایان پریود t به عمل آمده است، مطابق رویکرد مذکور برآورد مشخصه کیفی در پریود بعد بصورت $\hat{x}_{t+1}(t) = Z_t$ معرفی می‌شود که در آن مقدار Z_t مقدار آماره $EWMA$ را نشان می‌دهد که بوسیله رابطه

$$Z_t = \lambda x_t + (1 - \lambda)Z_{t-1} \quad (۱۴)$$

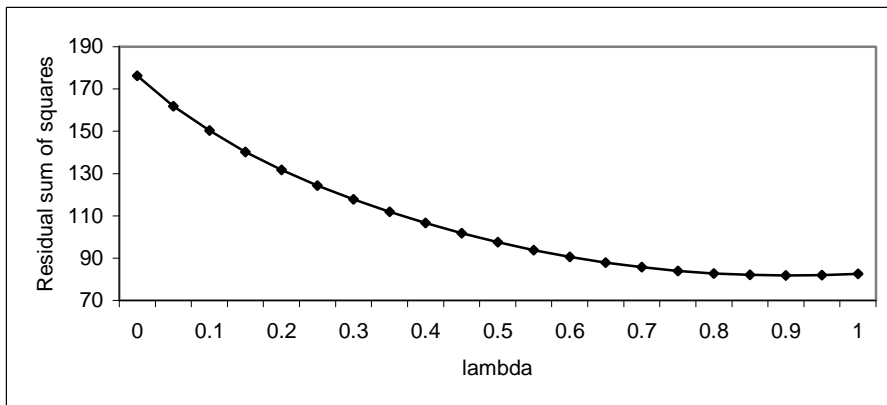
محاسبه می‌شود. مجموعه باقیمانده‌های یک‌پریودی حاصل از این پیش‌بینی یعنی $R_t = x_t - \hat{x}_t(t-1)$ از یکدیگر مستقل بوده و از توزیع یکسان با میانگین صفر برخوردارند. بدین ترتیب استفاده از نمودارهای کنترل برای مقادیر خطای پیش‌بینی یک‌پریودی امکان‌پذیر خواهد شد. بویژه نشان داده شده است که چنانچه ساختار خودهمبستگی در یک فرایند از مدل میانگین متحرک تلفیقی^۱ درجه اول، $IMA(1,1)$ ، که بصورت

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} \quad (۱۵)$$

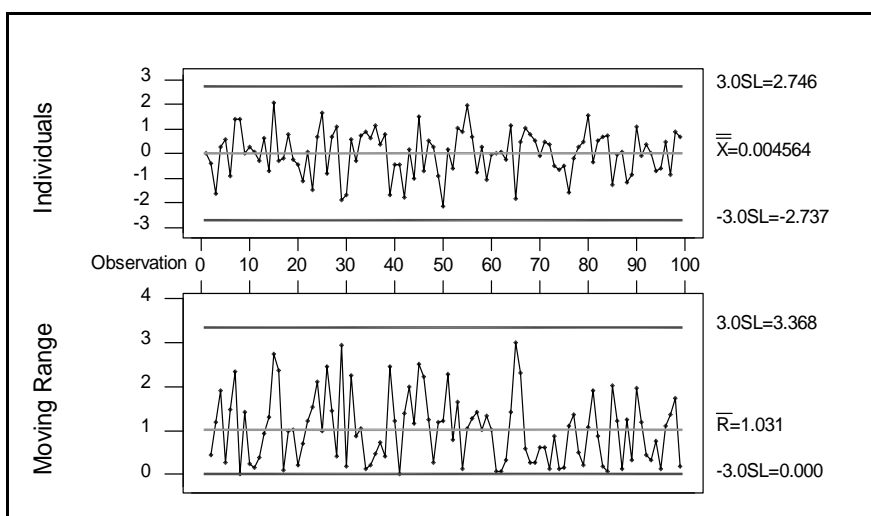
ارایه می‌شود پیروی کند، آنگاه آماره $EWMA$ با پارامتر $\lambda = 1 - \theta$ پیش‌بینی‌کننده یک‌پریودی بهینه برای این فرایند خواهد بود. مونته‌گمری و مسترآنجلو نشان داده‌اند که آماره $EWMA$ تحت شرایط خاصی برای سایر فرایندهای خودهمبسته نیز پیش‌بینی‌کننده یک‌پریودی مناسبی به شمار می‌رود [۱۰]. بطور کلی چنانچه مشاهدات گردآوری شده از فرایند دارای خودهمبستگی مثبت باشند و همچنین میانگین فرایند از تغییر جهت‌های ناگهانی و سریع برخوردار نباشد، آماره $EWMA$ بر مبنای

²Run chart

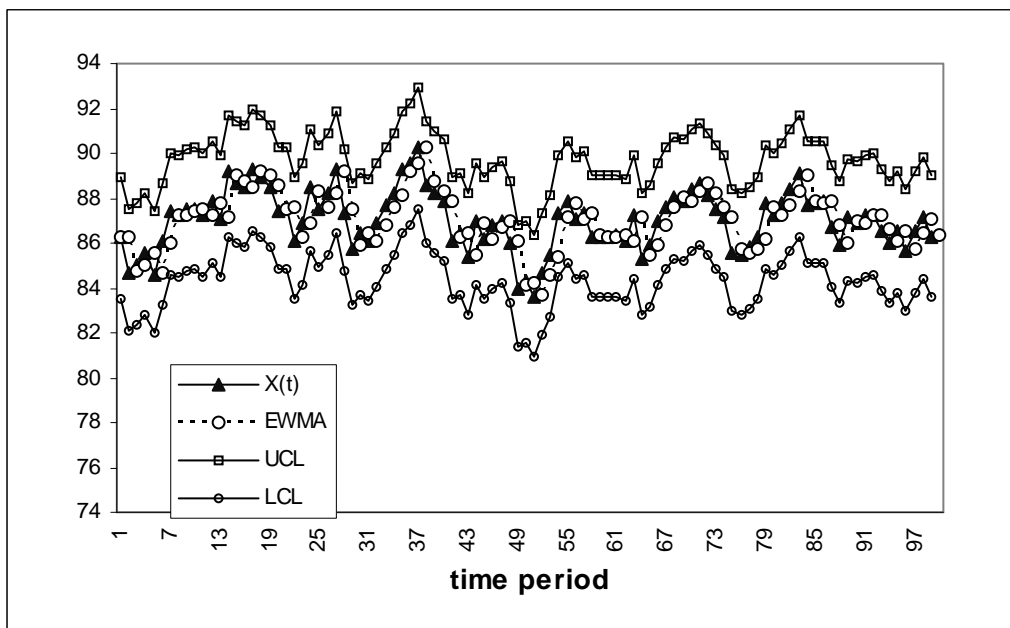
¹Integrated Moving Average



شکل ۱۶. نمودار مقادیر مربعات باقیمانده‌ها در مقابل مقادیر مختلف پارامتر λ



شکل ۱۷. نمودارهای کنترل مشاهدات انفرادی برای باقیمانده‌های مدل EWMA با پارامتر $\lambda = 0.9$



شکل ۱۸. نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایشی با خط مرکز متحرک بر مبنای مدل EWMA با پارامتر $\lambda = 0.9$

از آنجاکه برای یک توزیع نرمال، مقدار آماده MAD با مقدار انحراف معیار دارای رابطه $\sigma \approx 1.25\Delta$ می‌باشد، می‌توانیم مطابق رابطه زیر تخمین مناسبی از انحراف معیار خطای پیش‌بینی در زمان t تهیه کنیم [۱۱]. نهایتاً رویکرد سوم برای تخمین انحراف معیار استفاده از واریانس هموار شده است که در رابطه زیر نشان داده شده:

$$\hat{\sigma}_t^2 = \alpha R_t^2 + (1 - \alpha) \hat{\sigma}_{t-1}^2, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (22)$$

جهت بررسی بیشتر رویکرد سوم می‌توان به کار مک‌گریگور و هریس مراجعه نمود [۱۲].

لو و رینالدز کارایی آماره $EWMA$ را برای پایش میانگین یک فرآیند $ARMA(1,1)$ به دقت بررسی کرده‌اند [۱۳]. در تحقیق مذکور روشهایی برای استفاده از نمودار $EWMA$ که بطور مستقیم برای مشاهدات خودهمبسته استفاده می‌شود ارائه شده است. ایشان در این مقاله به این مسئله اشاره نمودند که برای فرآیندهایی با خودهمبستگی کم تا متوسط، استفاده از نمودار شوهارت برای مشاهدات فرآیند جهت کشف شیفت در میانگین فرآیند بسیار بهتر از یک نمودار شوهارت برای باقیمانده‌ها عمل می‌کند. چنانچه شناسایی شیفت‌های کوچک در میانگین فرآیند موردنظر باشد، استفاده از نمودار $EWMA$ برای این منظور به استفاده از نمودار شوهارت ترجیح داده می‌شود.

برای شیفت‌های بزرگ، استفاده از نمودار $EWMA$ برای باقیمانده‌ها بهتر از بکارگیری نمودار $EWMA$ برای مشاهدات خواهد بود و برای شیفت‌های کوچک، بکارگیری نمودار $EWMA$ برای مشاهدات نسبتاً بهتر است. همچنین لو و رینالدز پس از آزمایش و بررسی نمودارهای کنترل مختلف برای مشاهدات و باقیمانده‌ها به این نتیجه دست یافتند که استفاده از یک نمودار $EWMA$ برای مشاهدات فرآیند به همراه یک نمودار شوهارت برای باقیمانده‌ها در اغلب موارد یک روش ترکیبی مطلوب جهت کنترل میانگین فرآیند خودهمبسته به شمار می‌رود.

۴. جمع‌بندی

در این مقاله سعی شده است با معرفی رویکردهای مختلف ترسیم نمودارهای کنترل برای فرآیندهای خودهمبسته از نوع اتورگرسیو، با توجه به خصوصیات فرآیند مورد نظر شرایط انتخاب روش آماری مناسب برای کنترل مشخصه کیفی، مورد بررسی واقع شود. بر اساس مطالب بخش سوم از مقاله می‌توان فرآیند انتخاب نمودار مناسب را که پیش از این در شکل ۱۵ مورد اشاره واقع شد، مطابق شکل ۱۹ اصلاح نمود.

اگر چه تمرکز مقاله بر نمودارهای کنترل برای مشاهدات انفرادی قرار داشت اما تجزیه و تحلیل ویژگیهای فرآیند اتورگرسیو کاربران را برای استفاده از دیدگاه مناسب جهت رفع مشکل خودهمبستگی و تأثیرات آن بر روشهای آماری مرسوم یاری خواهد نمود.

رابطه فوق را می‌توان بصورت

$$P[-3\sigma_x \leq x_t - \hat{x}_t(t-1) \leq 3\sigma_x] = 0.9973 \quad (18)$$

بازنویسی کرد. پس خواهیم داشت:

$$P[\hat{x}_t(t-1) - 3\sigma_x \leq x_t \leq \hat{x}_t(t-1) + 3\sigma_x] = 0.9973 \quad (19)$$

با استفاده از رابطه فوق می‌توان نتیجه گرفت که اگر آماره $EWMA$ یک پیش‌بینی کننده مناسب برای مشاهدات فرآیند باشد، می‌توان مقدار Z_t را بعنوان خط مرکز نمودار کنترل در پرئود $t+1$ و مقادیر $Z_t + 3\sigma_\epsilon$ و $Z_t - 3\sigma_\epsilon$ را به ترتیب بعنوان حد کنترل بالا و حد کنترل پایین در لحظه $t+1$ تصور نمود. بنابراین بصورت خلاصه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} UCL_{t+1} = Z_t + 3\sigma_\epsilon \\ CL_{t+1} = Z_t \\ LCL_{t+1} = Z_t - 3\sigma_\epsilon \end{cases} \quad (20)$$

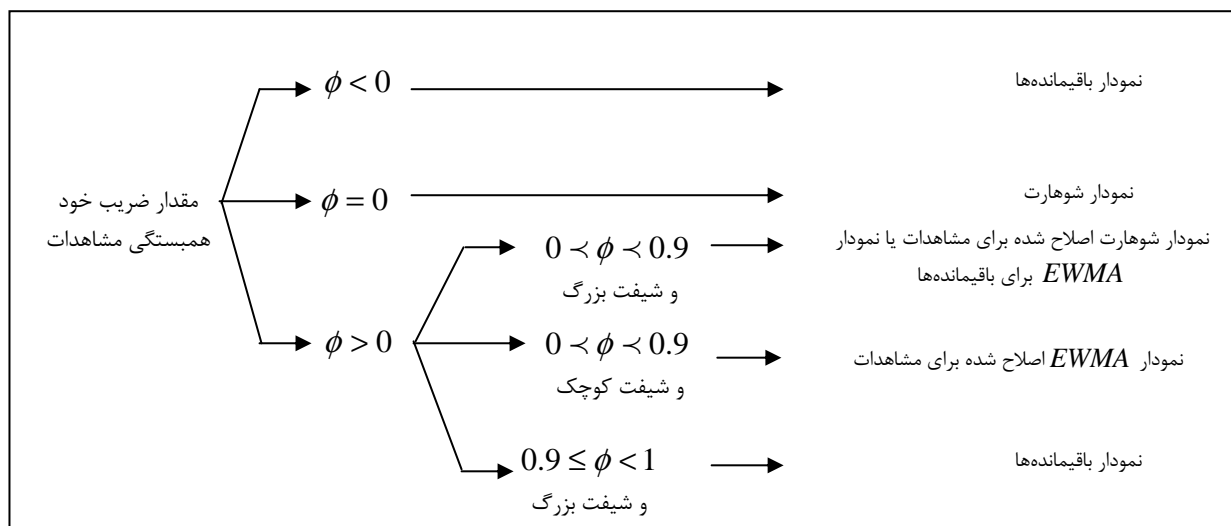
مونتگرگی و مسترآنجلو این نمودار را نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی با خط مرکز متحرک^۱ ($MCEWMA$) نام نهاده‌اند [۱۰].

این نمودار جدید همان اطلاعاتی که از طریق بررسی نمودار باقیمانده یا خطای پیش‌بینی $EWMA$ حاصل می‌شد را در اختیار می‌گذارد و علاوه بر این، در عمل به لحاظ سهولت در تفسیر روند مشاهدات در طی زمان، از مطلوبیت بیشتری برخوردار است. شکل ۱۸ نمودار $MCEWMA$ را برای مثال مورد بررسی ترسیم نموده است.

جهت ترسیم نمودار $MCEWMA$ به تخمین مناسبی از σ_ϵ نیاز خواهیم داشت. انحراف معیار خطای یک پرئودی یا همان باقیمانده‌های مدل را می‌توان به چند طریق برآورد نمود. چنانچه پارامتر λ همانطور که ذکر شد با استفاده از مجموعه ای شامل n مشاهده از فرآیند محاسبه شود آنگاه از تقسیم مجموع مربعات خطای پیش‌بینی برای λ بهینه بر عدد n ، برآورد مناسبی از σ_ϵ بدست می‌آید. این روشی است که در بسیاری از نرم‌افزارهای آماری نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد. رویکرد دیگر محاسبه تخمین σ_ϵ بر مبنای آماره میانگین قدر مطلق انحراف^۲ (MAD) می‌باشد که بطور معمول در سیستمهای پیش‌بینی مورد استفاده واقع می‌شود. میانگین قدر مطلق انحراف با بکارگیری آماره $EWMA$ برای مقدار مطلق خطای پیش‌بینی به صورت ذیل حاصل می‌شود:

$$\Delta_t = \alpha |R_t| + (1 - \alpha) \Delta_{t-1}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (21)$$

^۱Moving centerline exponentially weighted moving average
^۲Mean absolute deviation



شکل ۱۹. تصمیم‌گیری برای انتخاب نمودار مناسب از بین نمودار باقیمانده‌ها و نمودار شوهارت اصلاح شده در فرایند $AR(1)$

[7] Box, G. E.P., & Jenkins, G.M., "Time series analysis, forecasting and control", Revised Edition, Holden-Day, San Francisco, CA, 1976.

[8] Wardell, D.G., Moskowitz, H., & Plante, R.D., "Run Length Distributions of Special-Cause Control Charts For Correlated Processes", Technometrics, Vol. 36, No. 1, 1994, PP. 3-17.

[9] Montgomery, D.C., & Masterangelo, C.M., "Some Statistical Process Control Methods For Auto Correlated Data", Journal of Quality Technology, Vol. 23, 1991, PP. 179-204.

[10] Montgomery D.C., Johnson L.A., & Gardiner J.S., "Forecasting & Time Series Analysis", Second Edition, Mc-Graw Hill, 1990.

[11] Macgregor, J.F., & Harris, T.J., "The Exponentially Weighted Moving Variance", Journal of Quality Technology, Vol. 25, No. 2, 1993, PP. 106-118.

[12] Lu, C. W., & Reynolds, Jr. M.R., "EWMA Control Charts For Monitoring The Mean of Auto Correlated Processes", Journal of Quality Technology, Vol. 31, No. 2, 1999, PP.189-206.

[۱۳] نورالسنّا، رسول، و سقایی، عباس، «بهبود عملکرد نمودارهای کنترل برای داده‌های خود همبسته»، دومین کنفرانس ملی مدیریت کیفیت، تهران، ایران، ۱۳۷۶.

۵. تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله لازم می‌دانند صمیمانه از دقت نظر و پیشنهادات ارزشمند داوران محترم که در جهت ارتقاء کیفی مقاله بسیار موثر بوده است تشکر نمایند.

مراجع

[1] Montgomery, D.C., "Introduction to Statistical Quality Control", 4th Edition, John Wiley & Sons, Inc., 2001.

[2] Maragah, H.D., & Woodall, W.H., "The Effect of Autocorrelation on The Retrospective Xbar-Chart", Journal of Statistical Computation and Simulation, Vol. 40, No. 1, 1992, PP. 29-42.

[3] Alwan, L.C., & Roberts, H.V., "Time Series Modeling For Statistical Process Control", Journal of Business and Economic Statistics, Vol. 6, No. 1, 1988, PP. 87-95.

[4] Montgomery, D.C., & Friedman, J.J., "Statistical Process Control in a Computer-Integrated Manufacturing Environment", Statistical Process Control in Automated Manufacturing, J.B. Keats and F.B. Hubele, Dekker Series in Quality and Reliability, 1989.

[5] Wieringa, J.E., "Statistical Process Control For Serially Correlated Data", PhD. Thesis, University of Groningen, Department of Systems, Organizations and Management, Netherlands, 1998.

[6] Runger, G., & Willemain, T., "Model-Based and Model-Free Control of Auto Correlated Processes", Journal of Quality Technology, Vol. 27, No. 4, 1995, PP. 283-292.