IJIE نشریه بین المللی مهندسی صنایع و مدیریت تولید
دانشگاه علم و صنعت ایران

شماره ۱، جلد ۲۱، بهار ۱۳۸۹

نشریه بین المللی مهندسی صنایع و مدیریت تولید

ISSN: 2008-4870

Journal Website: http://IJIEPM.iust.ac.ir/

A Robust Optimization Approach to Resources Allocation in Maintained Systems

A. H. Shokouhi & H. Shahriari

***Amir H. Shokouhi**, PhD student, Industrial Engineering Department, K.N. Toosi University of Technology*
***Hamid Shahriari**, Assistance professor, Industrial Engineering Department, K.N. Toosi University of Technology*

Keywords

Robust Optimization,
Availability;
Redundancy Optimization;
Maintenance Resources

ABSTRACT

Optimization of maintenance resources to maximize the system availability is a major concern in different manufacturing systems. Therefore, a lot of effort is put to construct optimization models to reach the maximum availability level and to reduce the costs of lack of availability. However, despite these efforts, data uncertainty in the real world problems was neglected in proposed models which results models with sophisticated nonlinear constraints. In this article the budget uncertainty model of optimization is considered and its counterpart in resources allocation for maintained systems is presented. The proposed model takes into account the degrees of conservativeness to introduce a robust model of optimization. This model is capable of maximizing the availability for the maintained system under certain conditions. The capability of the model in controlling the effects of uncertainty is investigated by means of simulation studies and reasonable results concluded.

(یادداشت فنی)

رویکرد بهینه‌سازی استوار در تخصیص منابع در سیستم‌های نگهداری و تعمیرات

امیرحسین شکوهی و حمید شهریاری

کلمات کلیدی

بهینه‌سازی استوار،
سطح دسترسی،
بهینه‌سازی اجزاء اضافی،
منابع نگهداری و تعمیرات

چکیده:

مساله بهینه‌سازی منابع نگهداری و تعمیرات به منظور افزایش سطح دسترسی سیستم همواره مورد توجه پژوهش‌گران و محققان عرصه طراحی سیستم‌های مختلف صنعتی بوده است. بدین ترتیب تلاش‌های بسیار برای ساخت مدل‌های بهینه‌سازی جهت دستیابی به بیشترین سطح دسترسی و در نتیجه کاهش هزینه‌های ناشی از کمبود آن صورت گرفته است. این در حالی است

تاریخ وصول: ۸۸/۶/۲۲
تاریخ تصویب: ۸۸/۱۲/۱۸

امیرحسین شکوهی، دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، Shokouhi@dena.kntu.ac.ir

دکتر حمید شهریاری، استادیار، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، hshahriari@kntu.ac.ir

که عدم قطعیت موجود در دنیای پیرامون ما در نتایج حاصل از این تلاش‌ها دیده نمی‌شود و یا به علت اعمال این محدودیت، مدل‌هایی با محدودیت‌های غیرخطی پیچیده‌ای شکل گرفته‌اند. در این مقاله با توجه به مدل عدم قطعیت بودجه‌ای در بهینه‌سازی استوار که قابل اعمال به مسایل بهینه‌سازی می‌باشد و نیز آنکه قابلیت تنظیم درجه محافظه‌کاری را دارد، مدل معادل استوار مساله بهینه‌سازی منابع نگهداری و تعمیرات ارائه می گردید. این مدل توانایی بیشینه کردن سطح دسترسی در شرایط غیرقطعی را دارا می‌باشد. توانایی آن در شرایط حضور عدم قطعیت‌های مذکور به کمک شبیه‌سازی مورد آزمون، بررسی و تجزیه و تحلیل قرار گرفت و نتایج مطلوبی حاصل نمود.

۱. مقدمه

بهبود سطح دسترسی به عنوان یکی از دغدغه‌های مهندسین در طراحی سیستم‌های تولیدی شناخته می‌شود. این شاخص با بکارگیری اجزاء اضافی از یک سو و افزایش سطح دسترسی هر یک از اجزاء سیستم از سوی دیگر قابل ارتقاء است. گرچه بهره‌گیری از اجزاء اضافی موجب ارتقاء سطح دسترسی کل سیستم می‌شود لیکن به علت افزایش وزن و حجم سیستم، افزایش هزینه‌های طراحی، نگهداری و تعمیرات را در پی دارد. از سوی دیگر بهبود پایایی[1] و قابلیت نگهداری در راستای افزایش سطح دسترسی اجزاء سیستم، نیازمند سرمایه‌گذاری بیشتر است. بدین ترتیب بهینه‌سازی سطح دسترسی در کل سیستم تحت محدودیت‌هایی نظیر وزن، حجم و هزینه‌ها تنها راه دستیابی به این هدف است.

اهمیت طراحی و حل مدل‌های بهینه‌سازی سطح دسترسی، محققان را بر آن داشت که تحت فرضیات مختلف برای سیستم‌های تولیدی، مدل‌ها و شیوه های حل متنوعی ارائه دهند. از جمله محققانی که روش‌های مختلفی در تخصیص بهینه اجزاء اضافی ارائه داده‌اند می‌توان به کاسترو و کاوالکا[۱] اشاره کرد. در مورد یافتن بیشینه پایایی و قابلیت نگهداری و اثر آن‌ها در سطح دسترسی سیستم می‌توان به دستاوردهای محققانی چون کومار و همکاران[۲]، پاینتون و کامپبل[۳]، رابینسون و همکاران[۴]، لتین[۵ و ۶] ، کویت و اسمیت[۷] و لیتین و لیسنیانسکی[۸، ۹ و ۱۰] اشاره نمود. در نهایت کاسترو و کاوالکا[۱۱] بهینه‌سازی سطح دسترسی با تخصیص اجزاء اضافی و فعالیت‌های تعمیر و نگهداری را بسط دادند و در همین راستا کاسترو و کاوالکا[۱۲] بهینه‌سازی منابع تعمیر و نگهداری در سیستم‌های تولیدی را معرفی کردند.

یکی از فرضیات اساسی در مدل‌های بهینه سازی در تحقیقات اشاره شده، قطعی در نظر گرفتن میزان منابع و هزینه‌های مربوط به آن است. در حالی که مقادیر بسیاری از این پارامترها در شرایط واقعی غیرقطعی می‌باشند و به جای یک مقدار دقیق، بازه‌ای از مقادیر را به خود اختصاص می‌دهند.

بدین ترتیب امکان دارد به علت عدم قطعیت داده‌ها جواب بهینه‌ی حاصل از مدل‌های فوق موجه نباشند. در روش‌های کلاسیک برای در نظر گرفتن عدم قطعیت داده‌ها از رویکردهای تحلیل حساسیت و برنامه‌ریزی احتمالی بهره گرفته می‌شود. در رویکرد اول ابتدا از تاثیر عدم قطعیت داده‌ها بر روی مدل چشم‌پوشی می‌شود و متعاقبا برای صحه گذاشتن بر جواب‌های به دست آمده از تحلیل حساسیت استفاده می‌گردد. اما تحلیل حساسیت تنها ابزاری برای تحلیل خوب بودن جواب است و نمی توان از آن برای تولید جواب‌های استوار[2] استفاده کرد. علاوه بر آن انجام تحلیل حساسیت بر روی پارامترها به طور همزمان در مدل‌هایی که به تعداد زیادی داده غیرقطعی دارند، عملی نمی‌باشد. در اواسط دهه ۱۹۵۰ دانتزیگ[۱۳] برنامه-ریزی احتمالی را به عنوان یک رویکرد برای مدل کردن عدم قطعیت داده‌ها معرفی کرد؛ این رویکرد برای مقدارگیری پارامترها سناریوهایی با احتمالات مختلف را در نظر می‌گیرد و موجه بودن یک جواب با استفاده از محدودیت‌های شانس بیان می‌شود. سه مشکل اصلی برای این رویکرد وجود دارد: (الف) شناخت تابع توزیع داده‌ها و در نتیجه عددی کردن سناریوهایی که از این توزیع‌ها عدد می‌گیرند، (ب) محدودیت‌های شانس، ویژگی محدب بودن مساله اصلی را از بین می‌برد و بر پیچیدگی آن به مقدار زیادی می‌افزاید، (ج) ابعاد مدل بهینه‌سازی به دست آمده به صورت نجومی با زیاد شدن تعداد سناریوها افزایش می‌یابد، که چالش‌های محاسباتی عمده‌ای را موجب می‌گردد. بهینه‌سازی استوار رویکردی است که در سال‌های اخیر برای مقابله با عدم قطعیت داده‌ها معرفی شده است. این رویکرد به دنبال جواب‌های نزدیک به بهینه‌ای است که با احتمال بالایی موجه باشند. به عبارت دیگر با کمی صرف‌نظر کردن از تابع هدف، موجه بودن جواب به دست آمده را تضمین می‌کند. از این رو در این مقاله به کمک نگرش بهینه‌سازی استوار در حالی که کلیه‌ی داده‌های مربوط به هزینه، حجم و وزن اجزاء غیر قطعی می-باشند، به مدل‌سازی مسئله‌ی بهینه‌سازی منابع نگهداری و تعمیرات با هدف افزایش سطح اطمینان سیستم پرداخته خواهد شد. چارچوب عمومی مساله بهینه‌سازی سطح دسترسی بر اساس دستاوردهای کاسترو و کاوالکا[۱۲] به طور خلاصه در بخش ۲ بیان می‌شود. در ادامه و در بخش ۳ مدل استوار بهینه‌سازی سطح دسترسی ارائه می‌گردد. بخش ۴ به ارائه‌ی یک مثال عددی و مقایسه‌ی نتایج حاصل از آن می پردازد و در نهایت، بخش ۵ شامل نتیجه‌گیری و مطالعات بعدی می‌باشد.

[1] *Reliability*

[2] *Robust*

۲. مدل مساله بهینه‌سازی سطح دسترسی

کاسترو و کاوالکا[۱۲] در فرآیند تصمیم‌گیری اقتصادی و توجیه‌پذیری فنی، با بهره‌گیری از رویکرد تحلیل رابطه‌ی بین سطح دسترسی و قابلیت اعتماد از یک سو و رویکرد به کار بردن اجزاء اضافی در سیستم اصلی از سوی دیگر یک مدل بهینه‌سازی سطح دسترسی ارائه داده‌اند که این مدل در برگیرنده‌ی دستاوردهای محققانی چون ارتاس [۱۴] و وول[۱۵] می‌باشد. از آنجا که مدل نهایی ارائه شده توسط کاسترو و کاوالکا[۱۲] به عنوان مدل پایه در این مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرد لذا در این بخش به منظور آشنایی بیشتر با این مدل به طور خلاصه به نحوه‌ی شکل‌گیری این مدل اشاره می‌شود. به منظور محاسبه‌ی سطح دسترسی کاسترو و کاوالکا[۱۲] از معادله‌ی (۱) بهره گرفته‌اند. که در آن A_i بیان‌گر سطح دسترسی اجزاء زیر سیستم i و y_i نشان‌دهنده‌ی تعداد اجزاء در زیر سیستم i می‌باشد.

$$A_S = \prod_{i=1}^{n}\left[1-(1-A_i)^{y_i}\right] \qquad (۱)$$

با توجه به آن که در مدل مذکور فرض شده است زمان بین دو خرابی متوالی از توزیع نمایی پیروی می‌کند، لذا خواهیم داشت:

$$A_S = \prod_{i=1}^{n}\left[1-\left(\frac{1}{1+d_i}\right)^{y_i}\right] \qquad (۲)$$

که d_i نسبت قابلیت اعتماد در زیرسیستم i می‌باشد و به صورت نسبت بین نرخ تعمیر μ و نرخ خرابی λ آن زیر سیستم تعریف می‌شود. معادله‌ی (۳) بیان کننده‌ی کل هزینه‌ی سیستم است که با جمع هزینه‌های اجزاء هر یک از زیر سیستم‌ها به دست آمده است و به صورت یک محدودیت در نظر گرفته می‌شود.

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y_i \le C \qquad (۳)$$

به طریق مشابه، محدودیت‌های وزن و حجم کل سیستم نیز به صورت زیر معرفی شده‌اند.

$$\sum_{i=1}^{n} w_i y_i \le W \qquad (۴)$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i y_i \le V \qquad (۵)$$

که c_i، w_i و v_i به ترتیب میزان هزینه، وزن و حجم مربوط به اجزاء زیر سیستم i می‌باشد. کاسترو و کاوالکا[۱۲] هزینه‌ی تعمیرات اصلاحی سیستم برای زمان ثابت T را طبق محدودیت (۶) معرفی نموده‌اند.

$$\sum_{i=1}^{n} rec_i crec_i + \sum_{i=1}^{n} q_i(T)\, y_i cm_i \le CM \qquad (۶)$$

که در آن rec_i میزان منابع تعمیرات اصلاحی، y_i نشان‌دهنده‌ی تعداد اجزاء زیر سیستم i، $crec_i$ هزینه‌ی منابع تعمیر اصلاحی، cm_i هزینه‌ی تعمیرات اصلاحی در زیر سیستم i و $q_i(T)$ احتمال خرابی اجزاء زیرسیستم i است که با فرض نمایی بودن توزیع خرابی‌ها مقدار آن از معادله‌ی (۷) قابل محاسبه است.

$$q_i(T) = 1 - e^{-\lambda_i T} \qquad (۷)$$

کاسترو و کاوالکا[۱۲] به منظور نشان دادن نقش "منابع تعمیرات اصلاحی" بر روی سطح دسترسی از شاخص فشردگی I بهره گرفته‌اند که بیان کننده‌ی مقدار کاهش میانگین زمان تعمیرات در شرایطی است که ۱۰۰ درصد منابع بر روی جزء خاصی تمرکز یافته باشند. بدین ترتیب نسبت قابلیت اعتماد اجزاء زیرسیستم i، d_i را از رابطه‌ی (۸) به دست می‌آید.

$$d_i = \left[(I-1)rec_i + 1\right] d_{1i} \qquad (۸)$$

که d_{1i} نسبت قابلیت اعتماد در زمانی است که از منابع تعمیرات اصلاحی هیچ بهره‌ای گرفته نشده است. بدین ترتیب با تلفیق معادلات (۲) و (۸) کاسترو و کاوالکا[۱۲] سطح دسترسی یک سیستم با اجزاء اضافی را به عنوان تابعی از تعداد این اجزاء و منابع تعمیرات اصلاحی در نظر گرفتند که از رابطه‌ی (۹) به دست می‌آید:

$$A_S = \prod_{i=1}^{n}\left[1-\left(\frac{1}{1+\left[(I-1)rec_i+1\right]d_{1i}}\right)^{y_i}\right] \qquad (۹)$$

با توجه به توضیحات داده شده مدل پایه به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
\max \quad & A_S = \prod_{i=1}^{n}\left[1-\left(\frac{1}{1+\left[(I-1)rec_i+1\right]d_{1i}}\right)^{y_i}\right] \\
s.to: \quad & \sum_{i=1}^{n} c_i y_i \le C \\
& \sum_{i=1}^{n} w_i y_i \le W \\
& \sum_{i=1}^{n} v_i y_i \le V \\
& \sum_{i=1}^{n} rec_i crec_i + \sum_{i=1}^{n} q_i(T)\, y_i cm_i \le CM \\
& \sum_{i=1}^{n} rec_i \le 1 \\
& y_i \in N \qquad \forall i \\
& rec_i \ge 0 \qquad \forall i
\end{aligned} \qquad (۱۰)$$

آنچه در اینجا از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است و محوریت این مقاله بر آن پایه‌گذاری می‌شود، عدم قطعی بودن پارامترهای مدل پایه است.

بدین معنی که مدل معرفی شده در مجموعه روابط (۱۰) تنها در صورتی معتبر است که داده‌های آن به صورت قطعی معلوم باشند. حال آن که در شرایط واقعی بسیاری از پارامترهای مربوط به روابط (۳)، (۴)، (۵) و (۶) غیر قطعی می‌باشند. بدین ترتیب در این مقاله تلاش می‌شود برای رویارویی با این عدم قطعیت از یک رویکرد بهینه‌سازی تحت عنوان "بهینه‌سازی استوار" استفاده شود. جواب‌های بدست آمده از این روش بهینه‌سازی استوار به عنوان جواب‌های استوار شناخته می‌شوند. در ادبیات موضوع این عدم قطعیت به طور کلی به دو صورت عدم قطعیت بازه‌ای و عدم قطعیت بودجه‌ای تقسیم می‌گردند که در ادامه معرفی می‌شوند.

۲-۱. مدل عدم قطعیت بازه‌ای

فرض کنید که هزینه، وزن، حجم و هزینه‌ی تعمیر هر جزء و همچنین هزینه‌ی منابع تعمیر اصلاحی متغیرهای تصادفی مستقل هستند که به ترتیب با $\tilde{c}_i$، $\tilde{w}_i$، $\tilde{v}_i$، $c\tilde{m}_i$ و $cr\tilde{e}c_i$ نشان داده می‌شود و هر کدام از آن‌ها به ترتیب در بازه‌ی $[c_i, c_i+\hat{c}_i]$، $[w_i, w_i+\hat{w}_i]$، $[v_i, v_i+\hat{v}_i]$، $[cm_i, cm_i+c\hat{m}_i]$ و $[crec_i, crec_i+cr\hat{e}c_i]$ دارای یک توزیع متقارن هستند. J^c، J^w، J^v، J^{cm} و J^{crec} را مجموعه iهایی است که به ترتیب $\tilde{c}_i$، $\tilde{w}_i$، $\tilde{v}_i$، $c\tilde{m}_i$ و $cr\tilde{e}c_i$ برای آن‌ها غیرقطعی می‌باشد. بنابراین می‌توان میزان هر یک متغیرهای فوق را به شکل زیر نشان داد:

$$\tilde{c}_i = c_i + \hat{c}_i \xi_i^c \qquad \xi_i^c \in [0,+1] \quad \forall i \qquad (۱۱)$$

$$\tilde{w}_i = w_i + \hat{w}_i \xi_i^w \qquad \xi_i^w \in [0,+1] \quad \forall i \qquad (۱۲)$$

$$\tilde{v}_i = v_i + \hat{v}_i \xi_i^v \qquad \xi_i^v \in [0,+1] \quad \forall i \qquad (۱۳)$$

$$c\tilde{m}_i = cm_i + c\hat{m}_i \xi_i^{cm} \qquad \xi_i^{cm} \in [0,+1] \quad \forall i \qquad (۱۴)$$

$$cr\tilde{e}c_i = crec_i + cr\hat{e}c_i \xi_i^{crec} \qquad \xi_i^{crec} \in [0,+1] \quad \forall i \qquad (۱۵)$$

که در آن ξ_i^c، ξ_i^w، ξ_i^v، ξ_i^{cm} و ξ_i^{crec} متغیرهای تصادفی مستقل بین صفر و یک هستند که نوسان در داده‌ها را نشان می‌دهند. به این حالت که در آن همه عناصر بردار نوسان ξ می‌توانند در بازه $[0,1]$ تغییر کنند، مدل عدم قطعیت بازه‌ای می‌گویند.

۲-۲. مدل عدم قطعیت بودجه‌ای

همه شرایط مدل عدم قطعیت بازه‌ای برای مدل عدم قطعیت بودجه‌ای نیز صادق است، با این تفاوت که جمع عناصر نوسانی ξ نباید از یک کران بالا مثل Γ مربوط به آن بیشتر باشد.

$$\tilde{c}_i = c_i + \hat{c}_i \xi_i^c \qquad \xi_i^c \in [0,+1] \quad \forall i, \quad \sum_i \xi_i^c \le \Gamma^c \qquad (۱۶)$$

$$\tilde{w}_i = w_i + \hat{w}_i \xi_i^w \qquad \xi_i^w \in [0,+1] \quad \forall i, \quad \sum_i \xi_i^w \le \Gamma^w \qquad (۱۷)$$

$$\tilde{v}_i = v_i + \hat{v}_i \xi_i^v \qquad \xi_i^v \in [0,+1] \quad \forall i, \quad \sum_i \xi_i^v \le \Gamma^v \qquad (۱۸)$$

$$c\tilde{m}_i = cm_i + c\hat{m}_i \xi_i^{cm} \qquad \xi_i^{cm} \in [0,+1] \quad \forall i, \quad \sum_i \xi_i^{cm} \le \Gamma^{cm} \qquad (۱۹)$$

$$cr\tilde{e}c_i = crec_i + cr\hat{e}c_i \xi_i^{crec} \qquad \xi_i^{crec} \in [0,+1] \quad \forall i, \quad \sum_i \xi_i^{crec} \le \Gamma^{crec} \qquad (۲۰)$$

در بهینه‌سازی استوار برای مساله مورد بررسی با عدم قطعیت‌های فوق به دنبال یافتن جوابی است که محدودیت‌های موجود را با توجه به عدم قطعیت‌های موجود ارضاء کرده و تابع هدف را در این حالت ماکزیمم کند.

۳. مدل بهینه‌سازی استوار سطح دسترسی

در این مقاله به منظور دستیابی به یک جواب استوار برای مدل پایه MRO[1]، مدل استوار معادل آن که RMRO[2] گفته می‌شود ارایه می‌گردد. این مدل به دنبال بیشینه کردن مقدار تابع هدف با حضور محدودیت‌های استوار مساله MRO است. در ادامه برای لحاظ کردن عدم قطعیت داده‌ها در مساله مذکور از دو رویکرد اشاره شده در بهینه‌سازی استوار استفاده می‌کنیم.

۳-۱. مدل استوار برای عدم قطعیت بازه‌ای

در این حالت هدف کمینه‌کردن بیشترین مقدار تابع هدف است که اولین بار توسط سویستر[۱۶] ارائه شد. با توجه به این که در این روش به بهینه‌سازی بدترین حالت می‌پردازد، به شدت محافظه‌کارانه عمل می‌کند.

برطبق این روش فرض می‌شود که بدترین حالت برای همه داده‌های غیرقطعی رخ می‌دهد، به عبارت دیگر در مساله مورد بررسی حصول بدترین حالت زمانی اتفاق می‌افتد که کلیه‌ی پارامترها حداکثر

[1] *Maintenance Resources Optimization (MRO)*
[2] *Robust Maintenance Resources Optimization (RMRO)*

مقدار خود را اختیار کنند بدین ترتیب برای $\tilde{c}_i$، $\tilde{w}_i$، $\tilde{v}_i$، $c\tilde{m}_i$ و $cr\tilde{e}c_i$ به ترتیب مقادیر $c_i+\hat{c}_i$، $w_i+\hat{w}_i$، $v_i+\hat{v}_i$، $crec_i+cr\hat{e}c_i$ و $cm_i+c\hat{m}_i$ در نظر می‌گرفته می‌شود و مساله‌ی MRO حل می‌گردد.

بر مبنای رویکرد عدم قطعیت بازه‌ای مجموع روابط (۲۱) که از آن با نام $RMRO_1$ یاد می‌شود، مدل بهینه‌سازی استوار مساله MRO در مجموع روابط (۱۰) را ارائه می‌دهد.

$$
\begin{aligned}
\max \quad & A_s=\prod_{i=1}^{n}\left[1-\left(\frac{1}{1+\left[(I-1)\,rec_i+1\right]d_{1i}}\right)^{y_i}\right] \\
s.to: \quad & C\geq\sum_{i=1}^{n}(c_i+\hat{c}_i)\,y_i \\
& \sum_{i=1}^{n}(w_i+\hat{w}_i)\,y_i\leq W \\
& \sum_{i=1}^{n}(v_i+\hat{v}_i)\,y_i\leq V \\
& \sum_{i=1}^{n}rec_i\left(crec_i+cr\hat{e}c_i\right)+\sum_{i=1}^{n}q_i(T)\,y_i\left(cm_i+c\hat{m}_i\right)\leq CM \\
& \sum_{i=1}^{n}rec_i\leq 1 \\
& y_i\in N \qquad \forall i \\
& rec_i\geq 0 \qquad \forall i
\end{aligned}
\tag{۲۱}
$$

این رویکرد که محافظه‌کارانه‌ترین روش بهینه‌سازی استوار است، بسیار ساده می‌باشد و الگوریتم‌های فراابتکاری برای حل مساله MRO را می‌توان برای حل آن استفاده کرد؛ اما از آنجا که بدترین حالت در نظر گرفته می‌شود، به میزان زیادی از مقدار تابع هدف کاسته می‌گردد. در ادامه یک روش بهینه‌سازی استوار که میزان محافظه‌کاری آن قابل تنظیم است برای مساله MRO توضیح داده می‌شود.

۲-۳. بهینه‌سازی استوار با استفاده از مدل عدم قطعیت بودجه‌ای

برای مقابله با عیب روش سویستر[۱۶] که به شدت محافظه‌کارانه عمل می‌کند، بن-تال و نمیروفسکی [۱۷،۱۸و۱۹] و ال- قاوی [۲۰ و ۲۱] شیوه‌هایی ارایه کردند. روش‌های پیشنهادی آن‌ها خود باعث سخت‌تر شدن مساله استوار و عدم قابلیت اعمال آن بر روی مسایل بهینه‌سازی با متغیرهای گسسته می‌ش‌د.

کوولیس و یو [۲۲] برای مسایل بهینه‌سازی گسسته به طور خاص یک چارچوب بهینه‌سازی گسسته استوار ارایه کرده‌اند که به دنبال یافتن جوابی است که عملکرد بدترین وضعیت را تحت مجموعه‌ای از سناریوها برای داده‌ها کمینه کند. متاسفانه تحت رویکرد آن‌ها، مدل استوار معادل بسیاری از مسایل بهینه‌سازی گسسته، قابل حل در زمان چند جمله‌ای نیستند. از سوی دیگر یک روش بهینه‌سازی استوار برای مسایل برنامه‌ریزی خطی توسط برتسیمس و سیم[۲۳ و ۲۴] ارایه شد که از یک سو میزان محافظه‌کاری آن قابل تنظیم می‌باشد و از سوی دیگر بر درجه سختی مساله نمی‌افزاید. این روش قابلیت اعمال آن بر روی مسایل بهینه‌سازی گسسته و همچنین بهینه‌سازی ترکیبی نیز می‌باشد.

عدم‌قطعیت در روش برتسیمس و سیم[۲۳ و ۲۴] بودجه‌ای است و فرض می‌شود که حداکثر به تعداد Γ تا از ضرایب محدودیت‌ها یا تابع هدف تغییر می‌کند. به Γ سطح حفاظت می‌گویند و یک عدد صحیح نامنفی کوچکتر یا مساوی تعداد داده‌های غیر قطعی در محدودیت‌ها یا تابع هدف مربوطه می‌باشد. بدین ترتیب هنگامی که حداکثر Γ تا از این ضرایب تغییر کند جواب بهینه استوار به دست آمده قطعا بهینه خواهد ماند. از سوی دیگر در مواقعی که بیش از Γ تا از ضرایب تابع هدف تغییر کند باز جواب بهینه استوار، با احتمال بالایی موجه و نزدیک به بهینه باقی می‌ماند.

در این روش که تقریبی از بهینه‌سازی استوار با عدم قطعیت بازه‌ای است، با در نظر گرفتن روابط (۱۶)، (۱۷)، (۱۸) و (۱۹) و اعمال آن بر روی مساله MRO، مدل $RMRO_2$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & A_s=\prod_{i=1}^{n}\left[1-\left(\frac{1}{1+\left[(I-1)\,rec_i+1\right]d_{1i}}\right)^{y_i}\right] \\
s.to: \quad & \sum_{i=1}^{n}c_i y_i+\beta^{c}\left(\Gamma^{c}\right)\leq C \\
& \sum_{i=1}^{n}w_i y_i+\beta^{w}\left(\Gamma^{w}\right)\leq W \\
& \sum_{i=1}^{n}v_i y_i+\beta^{v}\left(\Gamma^{v}\right)\leq V \\
& \sum_{i=1}^{n}crec_i rec_i\,(+)+\sum_{i=1}^{n}q_i(T)\,y_i\left(cm_i+c\hat{m}_i\right)+\beta^{crec}\left(\Gamma^{crec}\right)+\beta^{cm}\left(\Gamma^{cm}\right)\leq CM
\end{aligned}
\tag{۲۲}
$$

$$\beta^{c}\left(\Gamma^{c}\right)=\max_{\left\{S^{c}\cup\{t^{c}\}\mid S^{c}\subseteq J^{c},|S^{c}|=\lfloor\Gamma^{c}\rfloor,t^{c}\in J^{c}\setminus S^{c}\right\}}\left\{\sum_{i\in S^{c}}\hat{c}_{i}y_{i}+\left(\Gamma^{c}-\lfloor\Gamma^{c}\rfloor\right)\hat{c}_{t^{c}}y_{t^{c}}\right\}$$

$$\beta^{v}\left(\Gamma^{v}\right)=\max_{\left\{S^{v}\cup\{t^{v}\}\mid S^{v}\subseteq J^{v},|S^{v}|=\lfloor\Gamma^{v}\rfloor,t^{v}\in J^{v}\setminus S^{v}\right\}}\left\{\sum_{i\in S^{v}}\hat{v}_{i}y_{i}+\left(\Gamma^{v}-\lfloor\Gamma^{v}\rfloor\right)\hat{v}_{t^{v}}y_{t^{v}}\right\}$$

$$\beta^{w}\left(\Gamma^{w}\right)=\max_{\left\{S^{w}\cup\{t^{w}\}\mid S^{w}\subseteq J^{w},|S^{w}|=\lfloor\Gamma^{w}\rfloor,t^{w}\in J^{w}\setminus S^{w}\right\}}\left\{\sum_{i\in S^{w}}\hat{w}_{i}y_{i}+\left(\Gamma^{w}-\lfloor\Gamma^{w}\rfloor\right)\hat{w}_{t^{w}}y_{t^{w}}\right\}$$

$$\beta^{crec}\left(\Gamma^{crec}\right)=\max_{\left\{S^{crec}\cup\{t^{crec}\}\mid S^{crec}\subseteq J^{crec},|S^{crec}|=\lfloor\Gamma^{crec}\rfloor,t^{crec}\in J^{crec}\setminus S^{crec}\right\}}\left\{\sum_{i\in S^{crec}}cr\hat{e}c_{i}\,rec_{i}+\left(\Gamma^{crec}-\lfloor\Gamma^{crec}\rfloor\right)cr\hat{e}c_{t^{crec}}\,rec_{t^{crec}}\right\}$$

$$\beta^{cm}\left(\Gamma^{cm}\right)=\max_{\left\{S^{cm}\cup\{t^{cm}\}\mid S^{cm}\subseteq J^{cm},|S^{cm}|=\lfloor\Gamma^{cm}\rfloor,t^{cm}\in J^{cm}\setminus S^{cm}\right\}}\left\{\sum_{i\in S^{cm}}q_{i}(T)\,c\hat{m}_{i}y_{i}+\left(\Gamma^{cm}-\lfloor\Gamma^{cm}\rfloor\right)q_{i}(T)\,c\hat{m}_{t^{cm}}y_{t^{cm}}\right\}$$

$$\sum_{i=1}^{n}rec_{i}\le 1$$

$$y_{i}\in N\quad\forall i$$

$$rec_{i}\ge 0\quad\forall i$$

که این مدل با مدل زیر معادل است:

$$\begin{aligned}
\max\quad & A_{S}=\prod_{i=1}^{n}\left[1-\left(\frac{1}{1+\left[(I-1)rec_{i}+1\right]d_{1i}}\right)^{y_{i}}\right]\\
s.to:\quad & \sum_{i=1}^{n}c_{i}y_{i}+\sum_{i\in J^{c}}p_{i}^{c}+\omega^{c}\Gamma^{c}\le C\\
& \sum_{i=1}^{n}w_{i}y_{i}+\sum_{i\in J^{w}}p_{i}^{w}+\omega^{w}\Gamma^{w}\le W\\
& \sum_{i=1}^{n}v_{i}y_{i}+\sum_{i\in J^{w}}p_{i}^{v}+\omega^{v}\Gamma^{v}\le V\\
& \sum_{i=1}^{n}crec_{i}y_{i}+\sum_{i=1}^{n}cm_{i}y_{i}+\sum_{i\in J^{crec}}p_{i}^{crec}+\sum_{i\in J^{cm}}p_{i}^{cm}+\omega^{cm}\Gamma^{cm}+\omega^{crec}\Gamma^{crec}\le CM(T)\\
& \omega^{c}+p_{i}^{c}\ge\hat{c}_{i}y_{i}\qquad\forall i\in J^{c}\\
& \omega^{w}+p_{i}^{w}\ge\hat{w}_{i}y_{i}\qquad\forall i\in J^{w}\\
& \omega^{v}+p_{i}^{v}\ge\hat{v}_{i}y_{i}\qquad\forall i\in J^{v}\\
& \omega^{crec}+p_{i}^{crec}\ge cr\hat{e}c_{i}y_{i}\qquad\forall i\in J^{crec}\\
& \omega^{cm}+p_{i}^{cm}\ge c\hat{m}_{i}y_{i}\qquad\forall i\in J^{cm}\\
& p_{i}^{c}\ge 0\qquad\forall i\in J^{c}\\
& p_{i}^{w}\ge 0\qquad\forall i\in J^{w}\\
& p_{i}^{v}\ge 0\qquad\forall i\in J^{v}\\
& p_{i}^{crec}\ge 0\qquad\forall i\in J^{crec}\\
& p_{i}^{cm}\ge 0\qquad\forall i\in J^{cm}\\
& y_{i}\in N\qquad\forall i\\
& rec_{i}\ge 0\qquad\forall i\\
& \sum_{i=1}^{n}rec_{i}\le 1\\
& \omega^{c},\omega^{w},\omega^{v},\omega^{crec},\omega^{cm}\ge 0
\end{aligned}\qquad(۲۳)$$

اثبات:

به منظور اثبات معادل بودن دو مدل (۲۲) و (۲۳) فرض کنید به ازای یک Γ^{c} و y^{*} داده شده، $\beta^{c}\left(y^{*},\Gamma^{c}\right)$ به صورت زیر باشد:

$$\beta^{c}\left(y^{*},\Gamma^{c}\right)=\max_{\left\{S^{c}\cup\{t^{c}\}\mid S^{c}\subseteq J^{c},|S^{c}|=\lfloor\Gamma^{c}\rfloor,t^{c}\in J^{c}\setminus S^{c}\right\}}\sum_{i\in S^{c}}\hat{c}_{i}y_{i}^{*}\qquad(۲۴)$$

پر واضح است که $\beta^{c}\left(y^{*},\Gamma^{c}\right)$ با جواب بهینه زیر برابر است:

$$\begin{aligned}
\max\quad & \beta^{c}\left(y^{*},\Gamma^{c}\right)=\sum_{i\in J^{c}}\hat{c}_{i}y_{i}^{*}z_{i}^{c}\\
s.to:\quad & \sum_{i\in J^{c}}z_{i}^{c}\le\Gamma^{c}\\
& 0\le z_{i}^{c}\le 1\qquad\forall i\in J^{c}
\end{aligned}\qquad(۲۵)$$

دوگان مساله (۲۵) به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \min \quad & \beta^c\left(y^*,\Gamma^c\right)=\sum_{i\in J^c} p_i^c+\omega^c\Gamma^c \\ s.to: \quad & \omega^c+p_i^c \geq \hat{c}_i y_i^* \\ & p_i^c \geq 0 \qquad \forall i \in J^c \\ & \omega^c \geq 0 \end{aligned} \tag{۲۶}$$

لذا بدیهی است که جواب بهینه (۲۴) با (۲۵) و آن نیز با (۲۶) برابر است و بدین ترتیب می‌توان برای محدودیت‌های مربوط به روابط (۴)، (۵) و (۶) به همین صورت عمل نمود که با جایگزینی آن‌ها در مدل (۲۲)، مدل (۲۳) به دست خواهد آمد.

۴. نتایج تجربی

به منظور بررسی تجربی مساله MRO، مثال ارائه شده در کاسترو و کاولکا[۱۲] که در آن پارامترها قطعی در نظر گرفته شده‌اند تحت شرایط غیر قطعی بودن مجددا در نظر گرفته شده است. در این نمونه مثال یک سیستم تولیدی متشکل از پنج زیر سیستم می‌باشد که هر زیر سیستم می‌تواند حاوی جزء یا اجزاء اضافی باشد که مشخصات این اجزاء در جدول ۱ ارائه شده است.

جدول ۱. مشخصات مربوط به زیرسیستم‌ها[۱۲]

Subsystem	MTBF	MTTR	Design Cost	Weight	Volume	Corrective maintenance cost	Corrective maintenance resources cost
۱	۵۰۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۵	۶۰	۷
۲	۵۵۰	۳۵	۵۵	۴۵	۵۰	۴۰	۳
۳	۶۰۰	۴۰	۵۵	۸۰	۷۰	۴۵	۴
۴	۷۵۰	۳۰	۴۰	۳۵	۳۵	۳۰	۲
۵	۵۰۰	۳۰	۶۰	۷۰	۶۰	۵۰	۵

T برابر ۱۰۰ واحد (که هم واحد با *MTBF*[۱] و *MTTR*[۲] می‌باشد) فرض می‌شود و حدود محدودیت‌های سیستم به ترتیب عبارتند از C=۱۰۰۰، W=۱۰۰۰، V=۱۰۰۰ و CM(T)=۵۰۰ می‌باشند و مقادیر تغییر در داده‌ها برای شرایط غیرقطعی، ۴۰٪ مقدار مشخص شده‌ی قطعی آن‌ها در جدول ۱ در نظر گرفته می‌شود که این تغیرات در جدول ۲ ارائه شده است.

جدول ۲. میزان تغییرات داده‌های غیر قطعی

	$\hat{c}_i$	$\hat{w}_i$	$\hat{v}_i$	$c\hat{m}_i$	$cr\hat{e}c_i$
۱	۲۰	۲۰	۲۲	۲۴	۲.۸
۲	۲۲	۱۸	۲۰	۱۶	۱.۲
۳	۲۲	۳۲	۲۸	۱۸	۱.۶
۴	۲۰	۱۴	۱۴	۱۲	۰.۸
۵	۲۴	۲۸	۲۶	۲۰	۲

با قطعی در نظر گرفتن داده‌های جدول ۱ مدل MRO و غیرقطعی در نظر گرفتن همین داده‌ها توسط جدول ۲ مدل $RMRO_1$ (مدل ۲۱) و $RMRO_2$ (مدل ۲۳ درجه‌ی محافظه‌کاری ۳ از ۵) به کمک نرم‌افزار GAMS حل شده است که مقادیر متغیر تصمیم و جواب بهینه هر یک از مدل‌ها از قرار جدول ۳ می‌باشد.

با آن که مقدار تابع هدف حاصل از حل مدل MRO بیشترین مقدار را به خود اختصاص داده است اما به ازای تغییر کوچکی در پارامترها، جواب به دست آمد به طور کلی ناموجه خواهد بود.
از طرف دیگر مقادیر بدست آمده برای مدل RMRO_1 همواره موجه می‌باشد ولی کاهش قابل ملاحظه‌ای در مقدار تابع هدف نسبت به مدل MRO دیده می‌شود.
این در حالی است که بسیاری از موارد عدم قطعیت موجود در داده‌ها به طور هم زمان رخ نمی‌دهند به همین علت در نظر گرفتن بدترین حالت برای آن‌ها در این گونه مسائل قطعا بهترین راه ممکن نخواهد بود.
بنابراین به کمک مدل $RMRO_2$ و با در نظر گرفتن تعداد درجه‌ی محافظه‌کاری ۳ (از ۵) برای تمامی Γها نتایجی به دست آمده است که گرچه مقدار تابع هدف آن نسبت به مدل *MRO* کاهش یافته است اما این مقدار اختلاف نسبت به تفاوت بین تابع هدف مدل‌های *MRO* و *RMRO*$_1$ به مراتب کمتر است. بدیهی است اختلاف اندک در تابع هدف به ازای پذیرش ریسک ناموجه بودن جواب حاصل از مدل *RMRO*$_1$ است.
به منظور محاسبه‌ی احتمال ناموجه بودن جواب حاصل از مدل *RMRO*$_1$، تابع توزیع داده‌های غیرقطعی یکنواخت فرض می‌شود و با ۱۰۰۰۰ بار شبیه‌سازی به بررسی احتمال نقض هر یک از محدودیت‌ها پرداخته شده است که نتیجه در جدول ۴ ارائه می‌شود.

[1] *Mean Time Between Failure*
[2] *Mean Time To Repair*

جدول ۳. نتایج حل مدل‌های MRO، $RMRO_1$ و $RMRO_2$

Subsystems	Redundancies	Corrective maintenance resources (% of all available resources)		
		MRO		
۱	۳	۳۴,۸	۱	۳
۲	۵	۰,۰	۲	۵
۳	۳	۲۴,۲	۳	۳
۴	۳	۱۲,۶	۴	۳
۵	۴	۰,۰	۵	۴
Availability		۹۹,۹۷	۰۷,۳۰	*Availability*
Feasibility		۰,۰۰	۱۰۰	*Feasibility*

جدول ۴. احتمال نقض محدودیت‌ها در مدل $RMRO_2$

Condition	Number	Probability %
(DC)۱	۱۵۳	۱.۵۳
(W)۲	۶۵	۰.۶۵
(V)۳	۵۴	۰.۵۴
(CREC & CM)۴	۱	۰.۰۱

بدین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت که در درجه‌ی محافظه‌کاری ۳، در بدترین حالت حدود ۲/۷ درصد امکان ناموجه بودن جواب به دست آمده از این روش وجود دارد لذا با توجه به میزان افزایش در تابع هدف، پذیرش این ریسک معقول به نظر می‌رسد. لازم به ذکر است که به منظور افزایش سطح دسترسی به دست آمده از مدل $RMRO_1$ تا سطح دسترسی حاصل از مدل $RMRO_2$ نیازمند به افزایشی در حدود ۲۴۰ واحد در مقدار CM هستیم. به عبارت دیگر باید میزان منابع مربوطه را به حدود ۱/۵ برابر حالت فعلی تغییر دهیم که مقدار قابل توجهی به نظر می رسد و توجیه اقتصادی ندارد.

۵. نتیجه‌گیری

همواره یکی از دغدغه‌های اصلی مشاوران صنعتی و کارشناسان طراحی سیستم‌ها، تخصیص بهینه منابع نگهداری و تعمیرات و تعیین تعداد اجزاء اضافی برای هر یک از اجزاء سیستم به منظور بالا بردن سطح دسترسی آن می‌باشد. با توجه به این که مساله با هزینه‌های گوناگونی نظیر هزینه طراحی، هزینه استفاده از منابع و غیره در ارتباط است و این هزینه‌ها اکثرا مقادیر غیر قطعی است، دست‌یابی به جواب بهینه استوار برای آن از اهمیت بالایی برخوردار است. در این مقاله با استفاده از رویکرد بهینه‌سازی استوار برای مدل عدم قطعیت بودجه‌ای، به جواب بهینه استوار رسیدیم که درجه محافظه‌کاری آن قابل تنظیم است و میزان جذابیت آن با استفاده از شبیه‌سازی تایید شد. اعمال نقش ارزش زمانی پول در مدل‌سازی مساله، توسعه‌ی روش‌های فرا ابتکاری به منظور حل این مساله و همچنین بررسی عدم قطعیت در MTBF و MTTR می‌توانند به عنوان مواردی برای مطالعات آتی مطرح گردند.

منابع

[1] Castro, H.F., Cavalca, K.L., *Reliability Optimization of Redundant System.* SAE Tech Papers, Danvers, MA, USA 2002;1(1):1–9.

[2] Kumar, A., Pathak, R.M., Gupta, Y.P., *Gemetic-Algorithm-Based Reliability Optimization for Computer Network Expansion*. IEEE Trans Reliab 1995;44(1): pp. 63–72.

[3] Painton, L., Campbell, J., *Genetic Algorithm in Optimization of System Reliability*. IEEE Trans Reliab 1995;44(2):172–8.

[4] Rubinstein, R.Y., Levitin, G., Lisnianski, A., *Ben-Haim H. Redundancy Optimization of Static Series-parallel Reliability Models Under Uncertainty.* IEEE Trans Reliab 1997;46(4):503–11.

[5] Levitin, G., *Redundancy Optimization for Multi-State System with Fixed Resource-Requirements and Unreliable Sources*. IEEE Trans Reliab 2001;50(1):52–9.

[6] Levitin, G., *Optimal Allocation of Elements in Linear Multi-State Sliding Window System.* Reliab Eng Syst Saf 2002;76:247–55.

[7] Coit, D.W., Smith, A.E., *Reliability Optimization of Series-Parallel System Using a Genetic Alorithm*. IEEE Trans Reliab 1996;45(2):254–66.

[8] Levitin, G., Lisnianski, A., Ben-Hain, H., Elmakis, D., *Redundancy Optimization for Multi-State System*. IEEE Trans Reliab 1998;47(2): 165–72.

[9] Lisnianski, A., Levitin, G., Ben-Hain, H., Structure optimization of multistate system with time redundancy. Reliab Eng Syst Saf 2000;67: 103–12.

[10] Levitin, G., Lisnianski, A., *Joint Redundancy and Maintenance Optimization for Multistate Series-Parallel systems.* Reliab Eng Syst Saf 1999;64: pp. 33–42.

[11] Castro, H.F., Cavalca, K.L., *Availability Optimization with Genetic Algorithm.* Int J Qual Reliab Manage 2003;20(7):847–63.

[12] Castro, H.F., Cavalca, K.L., *Maintenance Resources Optimization Applied to a Manufacturing System*. Reliab Eng Syst Saf 2005;91:413–20.

[13] Dantzig, G. B., *"Linear Programming Under Uncertainty*". Mgmt. Sci. 197-206, 1955.

[14] Ertas, A., The engineering design process. London:Wiley; 1993, P. 525.

[15] Wohl, J.G., *System Operational Readiness and Equipment Dependability*. IEEE Trans Reliab 1966; R-15(1):1–6.

[16] Soyster, A.L., "*Convex Programming with Set-Inclusive Constraints and Applications to Inexact Linear Programming",* Oper. Res. 21, 1973, pp.1154-1157.

[17] Ben-Tal, A., Nemirovski, A.,: *"Robust Solutions of Linear Programming Problems Contaminated with Uncertain Data*", Mathematical Programming. 88, 2000, pp. 411-424.

[18] Ben-Tal, A., Nemirovski, A., *"Robust Solutions to Uncertain Programs",* Operations Research Letters 25, 1999, pp. 1-13.

[19] Ben-Tal, A., Nemirovski , A,: "*Robust Convex Optimization",* Mathematical Operations Research, 23, 1998, pp. 769-805.

[20] El-Ghaoui, L,. Lebret, H., *"Robust Solutions to Least-Square Problems to Uncertain Data Matrices*"., SIAM J. Matrix Anal. Appl. 18, 1997, pp. 1035-1064.

[21] El-Ghaoui, L., Oustry, F., Lebret, H., *"Robust solutions to Uncertain Semidefnite Programs*", SIAM J. Optim. 9, 1998, pp. 33-52.

[22] Kouvelis, P., Yu, G.,: "*Robust Discrete Optimization and its Applications",* Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA. 1997.

[23] Bertsimas, D., Sym, M., "*The Price of the Robustness*", Operations Research, Vol(52)- 2004 , pp:35-53

[24] Bertsimas, D., Sym, M., "*Robust Discrete Optimization and Network Flows",* Mathematical Programming, Vol(98)- 2002, pp49-71