



ISSN: 2008-4870

Journal Website: <http://IJIEPM.iust.ac.ir/>

شماره ۱، جلد ۲۱، بهار ۱۳۸۹

نشریه بین المللی مهندسی صنایع و مدیریت تولید

## A Robust Optimization Approach to Resources Allocation in Maintained Systems

A. H. Shokouhi & H. Shahriari

Amir H. Shokouhi, PhD student, Industrial Engineering Department, K.N. Toosi University of Technology

Hamid Shahriari, Assistance professor, Industrial Engineering Department, K.N. Toosi University of Technology

### Keywords

Robust Optimization,  
Availability;  
Redundancy Optimization;  
Maintenance Resources

### ABSTRACT

Optimization of maintenance resources to maximize the system availability is a major concern in different manufacturing systems. Therefore, a lot of effort is put to construct optimization models to reach the maximum availability level and to reduce the costs of lack of availability. However, despite these efforts, data uncertainty in the real world problems was neglected in proposed models which results models with sophisticated nonlinear constraints. In this article the budget uncertainty model of optimization is considered and its counterpart in resources allocation for maintained systems is presented. The proposed model takes into account the degrees of conservativeness to introduce a robust model of optimization. This model is capable of maximizing the availability for the maintained system under certain conditions. The capability of the model in controlling the effects of uncertainty is investigated by means of simulation studies and reasonable results concluded.

© (نشریه بین المللی مهندسی صنایع و مدیریت تولید) شماره ۱، جلد ۲۱، ۱۳۸۹

### (یادداشت فنی)

## رویکرد بهینه‌سازی استوار در تخصیص منابع در سیستم‌های نگهداری و تعمیرات

امیرحسین شکوهی و حمید شهریاری

### چکیده:

مساله بهینه‌سازی منابع نگهداری و تعمیرات به منظور افزایش سطح دسترسی سیستم همواره مورد توجه پژوهش‌گران و محققان عرصه طراحی سیستم‌های مختلف صنعتی بوده است. بدین ترتیب تلاش‌های بسیار برای ساخت مدل‌های بهینه‌سازی جهت دستیابی به بیشترین سطح دسترسی و در نتیجه کاهش هزینه‌های ناشی از کمبود آن صورت گرفته است. این در حالی است

### کلمات کلیدی

بهینه‌سازی استوار،  
سطح دسترسی،  
بهینه‌سازی اجزاء اضافی،  
منابع نگهداری و تعمیرات

تاریخ وصول: ۸۸/۶/۲۲

تاریخ تصویب: ۸۸/۱۲/۱۸

امیرحسین شکوهی، دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، Shokouhi@dena.kntu.ac.ir

دکتر حمید شهریاری، استادیار، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، hshahriari@kntu.ac.ir

که عدم قطعیت موجود در دنیای پیرامون ما در نتایج حاصل از این تلاش‌ها دیده نمی‌شود و یا به علت اعمال این محدودیت، مدل‌هایی با محدودیت‌های غیرخطی پیچیده‌ای شکل گرفته‌اند. در این مقاله با توجه به مدل عدم قطعیت بودجه‌ای در بهینه‌سازی استوار که قابل اعمال به مسایل بهینه‌سازی می‌باشد و نیز آنکه قابلیت تنظیم درجه محافظه‌کاری را دارد، مدل معادل استوار مساله بهینه‌سازی منابع نگهداری و تعمیرات ارائه می‌گردد. این مدل توانایی بیشینه کردن سطح دسترسی در شرایط غیرقطعی را دارا می‌باشد. توانایی آن در شرایط حضور عدم قطعیت‌های مذکور به کمک شبیه‌سازی مورد آزمون، بررسی و تجزیه و تحلیل قرار گرفت و نتایج مطلوبی حاصل نمود.

## ۱. مقدمه

بهبود سطح دسترسی به عنوان یکی از دغدغه‌های مهندسی در طراحی سیستم‌های تولیدی شناخته می‌شود. این شاخص با بکارگیری اجزاء اضافی از یک سو و افزایش سطح دسترسی هر یک از اجزاء سیستم از سوی دیگر قابل ارتقاء است. گرچه بهره‌گیری از اجزاء اضافی موجب ارتقاء سطح دسترسی کل سیستم می‌شود لیکن به علت افزایش وزن و حجم سیستم، افزایش هزینه‌های طراحی، نگهداری و تعمیرات را در پی دارد. از سوی دیگر بهبود پایایی<sup>۱</sup> و قابلیت نگهداری در راستای افزایش سطح دسترسی اجزاء سیستم، نیازمند سرمایه‌گذاری بیشتر است. بدین ترتیب بهینه‌سازی سطح دسترسی در کل سیستم تحت محدودیت‌هایی نظیر وزن، حجم و هزینه‌ها تنها راه دستیابی به این هدف است.

اهمیت طراحی و حل مدل‌های بهینه‌سازی سطح دسترسی، محققان را بر آن داشت که تحت فرضیات مختلف برای سیستم‌های تولیدی، مدل‌ها و شیوه‌های حل متنوعی ارائه دهند. از جمله محققانی که روش‌های مختلفی در تخصیص بهینه اجزاء اضافی ارائه داده‌اند می‌توان به کاسترو و کاوالکا [۱] اشاره کرد. در مورد یافتن بیشینه پایایی و قابلیت نگهداری و اثر آن‌ها در سطح دسترسی سیستم می‌توان به دستاوردهای محققانی چون کومار و همکاران [۲]، پاینتون و کامپیل [۳]، رایبسون و همکاران [۴]، لتین [۵] و [۶]، کویت و اسمیت [۷] و لیتین و لیسینیاسکی [۸]، ۹ و [۱۰] اشاره نمود. در نهایت کاسترو و کاوالکا [۱۱] بهینه‌سازی سطح دسترسی با تخصیص اجزاء اضافی و فعالیت‌های تعمیر و نگهداری را بسط دادند و در همین راستا کاسترو و کاوالکا [۱۲] بهینه‌سازی منابع تعمیر و نگهداری در سیستم‌های تولیدی را معرفی کردند.

یکی از فرضیات اساسی در مدل‌های بهینه‌سازی در تحقیقات اشاره شده، قطعی در نظر گرفتن میزان منابع و هزینه‌های مربوط به آن است. در حالی که مقادیر بسیاری از این پارامترها در شرایط واقعی غیرقطعی می‌باشند و به جای یک مقدار دقیق، بازه‌ای از مقادیر را به خود اختصاص می‌دهند.

بدین ترتیب امکان دارد به علت عدم قطعیت داده‌ها جواب بهینه‌ی حاصل از مدل‌های فوق موجه نباشند. در روش‌های کلاسیک برای در نظر گرفتن عدم قطعیت داده‌ها از رویکردهای تحلیل حساسیت

و برنامه‌ریزی احتمالی بهره گرفته می‌شود. در رویکرد اول ابتدا از تاثیر عدم قطعیت داده‌ها بر روی مدل چشم‌پوشی می‌شود و متعاقباً برای صحت گذاشتن بر جواب‌های به دست آمده از تحلیل حساسیت استفاده می‌گردد. اما تحلیل حساسیت تنها ابزاری برای تحلیل خوب بودن جواب است و نمی‌توان از آن برای تولید جواب‌های استوار<sup>۲</sup> استفاده کرد. علاوه بر آن انجام تحلیل حساسیت بر روی پارامترها به طور همزمان در مدل‌هایی که به تعداد زیادی داده غیرقطعی دارند، عملی نمی‌باشد. در اواسط دهه ۱۹۵۰ دانتزیگ [۱۳] برنامه‌ریزی احتمالی را به عنوان یک رویکرد برای مدل کردن عدم قطعیت داده‌ها معرفی کرد؛ این رویکرد برای مقدارگیری پارامترها سناریوهایی با احتمالات مختلف را در نظر می‌گیرد و موجه بودن یک جواب با استفاده از محدودیت‌های شانس بیان می‌شود. سه مشکل اصلی برای این رویکرد وجود دارد: (الف) شناخت تابع توزیع داده‌ها و در نتیجه عددی کردن سناریوهایی که از این توزیع‌ها عددی می‌گیرند، (ب) محدودیت‌های شانس، ویژگی محذب بودن مساله اصلی را از بین می‌برد و بر پیچیدگی آن به مقدار زیادی می‌افزاید، (ج) ابعاد مدل بهینه‌سازی به دست آمده به صورت نجومی با زیاد شدن تعداد سناریوها افزایش می‌یابد، که چالش‌های محاسباتی عمده‌ای را موجب می‌گردد. بهینه‌سازی استوار رویکردی است که در سال‌های اخیر برای مقابله با عدم قطعیت داده‌ها معرفی شده است. این رویکرد به دنبال جواب‌های نزدیک به بهینه‌ای است که با احتمال بالایی موجه باشند. به عبارت دیگر با کمی صرف‌نظر کردن از تابع هدف، موجه بودن جواب به دست آمده را تضمین می‌کند. از این رو در این مقاله به کمک نگرش بهینه‌سازی استوار در حالی که کلیه داده‌های مربوط به هزینه، حجم و وزن اجزاء غیر قطعی می‌باشند، به مدل‌سازی مسئله بهینه‌سازی منابع نگهداری و تعمیرات با هدف افزایش سطح اطمینان سیستم پرداخته خواهد شد. چارچوب عمومی مساله بهینه‌سازی سطح دسترسی بر اساس دستاوردهای کاسترو و کاوالکا [۱۲] به طور خلاصه در بخش ۲ بیان می‌شود. در ادامه و در بخش ۳ مدل استوار بهینه‌سازی سطح دسترسی ارائه می‌گردد. بخش ۴ به ارائه‌ی یک مثال عددی و مقایسه‌ی نتایج حاصل از آن می‌پردازد و در نهایت، بخش ۵ شامل نتیجه‌گیری و مطالعات بعدی می‌باشد.

<sup>2</sup> Robust

<sup>1</sup> Reliability

$$\sum_{i=1}^n rec_i c_{rec_i} + \sum_{i=1}^n q_i(T) y_i c_{m_i} \leq CM \quad (6)$$

که در آن  $rec_i$  میزان منابع تعمیرات اصلاحی،  $y_i$  نشان‌دهنده تعداد اجزاء زیر سیستم  $i$ ،  $c_{rec_i}$  هزینه‌ی منابع تعمیر اصلاحی،  $c_{m_i}$  هزینه‌ی تعمیرات اصلاحی در زیر سیستم  $i$  و  $q_i(T)$  احتمال خرابی اجزاء زیرسیستم  $i$  است که با فرض نمایی بودن توزیع خرابی‌ها مقدار آن از معادله‌ی (۷) قابل محاسبه است.

$$q_i(T) = 1 - e^{-\lambda_i T} \quad (7)$$

کاسترو و کاوالکا [۱۲] به منظور نشان دادن نقش "منابع تعمیرات اصلاحی" بر روی سطح دسترسی از شاخص فشردگی  $I$  بهره گرفته‌اند که بیان‌کننده‌ی مقدار کاهش میانگین زمان تعمیرات در شرایطی است که ۱۰۰ درصد منابع بر روی جزء خاصی تمرکز یافته باشند. بدین ترتیب نسبت قابلیت اعتماد اجزاء زیرسیستم  $i$ ،  $d_i$  را از رابطه‌ی (۸) به دست می‌آید.

$$d_i = [(I-1)rec_i + 1] d_{1i} \quad (8)$$

که  $d_{1i}$  نسبت قابلیت اعتماد در زمانی است که از منابع تعمیرات اصلاحی هیچ بهره‌ای گرفته نشده است. بدین ترتیب با تلفیق معادلات (۲) و (۸) کاسترو و کاوالکا [۱۲] سطح دسترسی یک سیستم با اجزاء اضافی را به عنوان تابعی از تعداد این اجزاء و منابع تعمیرات اصلاحی در نظر گرفتند که از رابطه‌ی (۹) به دست می‌آید:

$$A_s = \prod_{i=1}^n \left[ 1 - \left( \frac{1}{1 + [(I-1)rec_i + 1] d_{1i}} \right)^{y_i} \right] \quad (9)$$

با توجه به توضیحات داده شده مدل پایه به صورت زیر خواهد بود:

$$\max A_s = \prod_{i=1}^n \left[ 1 - \left( \frac{1}{1 + [(I-1)rec_i + 1] d_{1i}} \right)^{y_i} \right]$$

$$s.to: \sum_{i=1}^n c_i y_i \leq C$$

$$\sum_{i=1}^n w_i y_i \leq W \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^n v_i y_i \leq V$$

$$\sum_{i=1}^n rec_i c_{rec_i} + \sum_{i=1}^n q_i(T) y_i c_{m_i} \leq CM$$

$$\sum_{i=1}^n rec_i \leq 1$$

$$y_i \in N \quad \forall i$$

$$rec_i \geq 0 \quad \forall i$$

## ۲. مدل مساله بهینه‌سازی سطح دسترسی

کاسترو و کاوالکا [۱۲] در فرآیند تصمیم‌گیری اقتصادی و توجیه‌پذیری فنی، با بهره‌گیری از رویکرد تحلیل رابطه‌ی بین سطح دسترسی و قابلیت اعتماد از یک سو و رویکرد به کار بردن اجزاء اضافی در سیستم اصلی از سوی دیگر یک مدل بهینه‌سازی سطح دسترسی ارائه داده‌اند که این مدل در برگزیده‌ی دستاوردهای محققانی چون ارتاس [۱۴] و وول [۱۵] می‌باشد. از آنجا که مدل نهایی ارائه شده توسط کاسترو و کاوالکا [۱۲] به عنوان مدل پایه در این مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرد لذا در این بخش به منظور آشنایی بیشتر با این مدل به طور خلاصه به نحوه‌ی شکل‌گیری این مدل اشاره می‌شود. به منظور محاسبه‌ی سطح دسترسی کاسترو و کاوالکا [۱۲] از معادله‌ی (۱) بهره گرفته‌اند. که در آن  $A_i$  بیان‌گر سطح دسترسی اجزاء زیر سیستم  $i$  و  $y_i$  نشان‌دهنده‌ی تعداد اجزاء در زیر سیستم  $i$  می‌باشد.

$$A_s = \prod_{i=1}^n [1 - (1 - A_i)^{y_i}] \quad (1)$$

با توجه به آن که در مدل مذکور فرض شده است زمان بین دو خرابی متوالی از توزیع نمایی پیروی می‌کند، لذا خواهیم داشت:

$$A_s = \prod_{i=1}^n \left[ 1 - \left( \frac{1}{1 + d_i} \right)^{y_i} \right] \quad (2)$$

که  $d_i$  نسبت قابلیت اعتماد در زیرسیستم  $i$  می‌باشد و به صورت نسبت بین نرخ تعمیر  $\mu$  و نرخ خرابی  $\lambda$  آن زیر سیستم تعریف می‌شود. معادله‌ی (۳) بیان‌کننده‌ی کل هزینه‌ی سیستم است که با جمع هزینه‌های اجزاء هر یک از زیر سیستم‌ها به دست آمده است و به صورت یک محدودیت در نظر گرفته می‌شود.

$$\sum_{i=1}^n c_i y_i \leq C \quad (3)$$

به طریق مشابه، محدودیت‌های وزن و حجم کل سیستم نیز به صورت زیر معرفی شده‌اند.

$$\sum_{i=1}^n w_i y_i \leq W \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n v_i y_i \leq V \quad (5)$$

که  $c_i$ ،  $w_i$  و  $v_i$  به ترتیب میزان هزینه، وزن و حجم مربوط به اجزاء زیر سیستم  $i$  می‌باشد. کاسترو و کاوالکا [۱۲] هزینه‌ی تعمیرات اصلاحی سیستم برای زمان ثابت  $T$  را طبق محدودیت (۶) معرفی نموده‌اند.

۲-۲. مدل عدم قطعیت بودجه‌ای

همه شرایط مدل عدم قطعیت بازه‌ای برای مدل عدم قطعیت بودجه‌ای نیز صادق است، با این تفاوت که جمع عناصر نوسانی  $\xi_i^c$  نباید از یک کران بالا مثل  $\Gamma$  مربوط به آن بیشتر باشد.

$$\tilde{c}_i = c_i + \hat{c}_i \xi_i^c \quad \xi_i^c \in [0, +1] \quad \forall i, \quad \sum_i \xi_i^c \leq \Gamma^c \quad (16)$$

$$\tilde{w}_i = w_i + \hat{w}_i \xi_i^w \quad \xi_i^w \in [0, +1] \quad \forall i, \quad \sum_i \xi_i^w \leq \Gamma^w \quad (17)$$

$$\tilde{v}_i = v_i + \hat{v}_i \xi_i^v \quad \xi_i^v \in [0, +1] \quad \forall i, \quad \sum_i \xi_i^v \leq \Gamma^v \quad (18)$$

$$\tilde{\alpha}_i = \alpha_i + \hat{\alpha}_i \xi_i^{\alpha m} \quad \xi_i^{\alpha m} \in [0, +1] \quad \forall i, \quad \sum_i \xi_i^{\alpha m} \leq \Gamma^{\alpha m} \quad (19)$$

$$\tilde{c}rec_i = crec_i + \hat{c}rec_i \xi_i^{crec} \quad \xi_i^{crec} \in [0, +1] \quad \forall i, \quad \sum_i \xi_i^{crec} \leq \Gamma^{crec} \quad (20)$$

در بهینه‌سازی استوار برای مساله مورد بررسی با عدم قطعیت‌های فوق به دنبال یافتن جوابی است که محدودیت‌های موجود را با توجه به عدم قطعیت‌های موجود ارضاء کرده و تابع هدف را در این حالت ماکزیمم کند.

۳-۱. مدل بهینه‌سازی استوار سطح دسترسی

در این مقاله به منظور دستیابی به یک جواب استوار برای مدل پایه MRO<sup>۱</sup>، مدل استوار معادل آن که RMRO<sup>۲</sup> گفته می‌شود ارائه می‌گردد. این مدل به دنبال بیشینه کردن مقدار تابع هدف با حضور محدودیت‌های استوار مساله MRO است. در ادامه برای لحاظ کردن عدم قطعیت داده‌ها در مساله مذکور از دو رویکرد اشاره شده در بهینه‌سازی استوار استفاده می‌کنیم.

۳-۱. مدل استوار برای عدم قطعیت بازه‌ای

در این حالت هدف کمینه کردن بیشترین مقدار تابع هدف است که اولین بار توسط سویستر [۱۶] ارائه شد. با توجه به این که در این روش به بهینه‌سازی بدترین حالت می‌پردازد، به شدت محافظه‌کارانه عمل می‌کند.

برطبق این روش فرض می‌شود که بدترین حالت برای همه داده‌های غیرقطعی رخ می‌دهد، به عبارت دیگر در مساله مورد بررسی حصول بدترین حالت زمانی اتفاق می‌افتد که کلیه پارامترها حداکثر

آنچه در اینجا از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است و محوریت این مقاله بر آن پایه‌گذاری می‌شود، عدم قطعیت بودن پارامترهای مدل پایه است.

بدین معنی که مدل معرفی شده در مجموعه روابط (۱۰) تنها در صورتی معتبر است که داده‌های آن به صورت قطعی معلوم باشند. حال آن که در شرایط واقعی بسیاری از پارامترهای مربوط به روابط (۳)، (۴)، (۵) و (۶) غیر قطعی می‌باشند. بدین ترتیب در این مقاله تلاش می‌شود برای رویارویی با این عدم قطعیت از یک رویکرد بهینه‌سازی تحت عنوان "بهینه‌سازی استوار" استفاده شود. جواب‌های بدست آمده از این روش بهینه‌سازی استوار به عنوان جواب‌های استوار شناخته می‌شوند. در ادبیات موضوع این عدم قطعیت به طور کلی به دو صورت عدم قطعیت بازه‌ای و عدم قطعیت بودجه‌ای تقسیم می‌گردند که در ادامه معرفی می‌شوند.

۲-۱. مدل عدم قطعیت بازه‌ای

فرض کنید که هزینه، وزن، حجم و هزینه‌ی تعمیر هر جزء و همچنین هزینه‌ی منابع تعمیر اصلاحی متغیرهای تصادفی مستقل هستند که به ترتیب با  $\tilde{c}_i, \tilde{w}_i, \tilde{v}_i, \tilde{c}m_i$  و  $c\tilde{r}ec_i$  نشان داده می‌شود و هر کدام از آن‌ها به ترتیب در بازه‌ی  $[c_i, \hat{c}_i]$ ،  $[w_i, \hat{w}_i]$ ،  $[v_i, \hat{v}_i]$ ،  $[cm_i, \hat{c}m_i]$  و  $[crec_i, \hat{c}rec_i]$  دارای یک توزیع متقارن هستند.  $J^c, J^w, J^v, J^{cm}$  و  $J^{crec}$  را مجموعه‌ی  $i$ هایی است که به ترتیب  $\tilde{c}_i, \tilde{w}_i, \tilde{v}_i, \tilde{c}m_i$  و  $c\tilde{r}ec_i$  برای آن‌ها غیرقطعی می‌باشد. بنابراین می‌توان میزان هر یک متغیرهای فوق را به شکل زیر نشان داد:

$$\tilde{c}_i = c_i + \hat{c}_i \xi_i^c \quad \xi_i^c \in [0, +1] \quad \forall i \quad (11)$$

$$\tilde{w}_i = w_i + \hat{w}_i \xi_i^w \quad \xi_i^w \in [0, +1] \quad \forall i \quad (12)$$

$$\tilde{v}_i = v_i + \hat{v}_i \xi_i^v \quad \xi_i^v \in [0, +1] \quad \forall i \quad (13)$$

$$\tilde{c}m_i = cm_i + \hat{c}m_i \xi_i^{cm} \quad \xi_i^{cm} \in [0, +1] \quad \forall i \quad (14)$$

$$c\tilde{r}ec_i = crec_i + \hat{c}rec_i \xi_i^{crec} \quad \xi_i^{crec} \in [0, +1] \quad \forall i \quad (15)$$

که در آن  $\xi_i^c, \xi_i^w, \xi_i^v, \xi_i^{cm}$  و  $\xi_i^{crec}$  متغیرهای تصادفی مستقل بین صفر و یک هستند که نوسان در داده‌ها را نشان می‌دهند. به این حالت که در آن همه عناصر بردار نوسان  $\xi_i^c$  می‌توانند در بازه  $[0, 1]$  تغییر کنند، مدل عدم قطعیت بازه‌ای می‌گویند.

<sup>1</sup> Maintenance Resources Optimization (MRO)

<sup>2</sup> Robust Maintenance Resources Optimization (RMRO)

۲-۳. بهینه‌سازی استوار با استفاده از مدل عدم قطعیت

بودجه‌ای

برای مقابله با عیب روش سویستر [۱۶] که به شدت محافظه‌کارانه عمل می‌کند، بن-تال و نمیروفسکی [۱۷، ۱۸] و ال-قاوی [۲۰] و [۲۱] شیوه‌هایی ارائه کردند. روش‌های پیشنهادی آن‌ها خود باعث سخت‌تر شدن مساله استوار و عدم قابلیت اعمال آن بر روی مسایل بهینه‌سازی با متغیرهای گسسته می‌شود.

کوولیس و یو [۲۲] برای مسایل بهینه‌سازی گسسته به طور خاص یک چارچوب بهینه‌سازی گسسته استوار ارائه کرده‌اند که به دنبال یافتن جوابی است که عملکرد بدترین وضعیت را تحت مجموعه‌ای از سناریوها برای داده‌ها کمینه کند. متأسفانه تحت رویکرد آن‌ها، مدل استوار معادل بسیاری از مسایل بهینه‌سازی گسسته، قابل حل در زمان چند جمله‌ای نیستند. از سوی دیگر یک روش بهینه‌سازی استوار برای مسایل برنامه‌ریزی خطی توسط برتسیمس و سیم [۲۳] و [۲۴] ارائه شد که از یک سو میزان محافظه‌کاری آن قابل تنظیم می‌باشد و از سوی دیگر بر درجه سختی مساله نمی‌افزاید. این روش قابلیت اعمال آن بر روی مسایل بهینه‌سازی گسسته و همچنین بهینه‌سازی ترکیبی نیز می‌باشد.

عدم قطعیت در روش برتسیمس و سیم [۲۳] و [۲۴] بودجه‌ای است و فرض می‌شود که حداکثر به تعداد  $\Gamma$  تا از ضرایب محدودیت‌ها یا تابع هدف تغییر می‌کند. به  $\Gamma$  سطح حفاظت می‌گویند و یک عدد صحیح نامنفی کوچکتر یا مساوی تعداد داده‌های غیر قطعی در محدودیت‌ها یا تابع هدف مربوطه می‌باشد. بدین ترتیب هنگامی که حداکثر  $\Gamma$  تا از این ضرایب تغییر کند جواب بهینه استوار به دست آمده قطعاً بهینه خواهد ماند. از سوی دیگر در مواقعی که بیش از  $\Gamma$  تا از ضرایب تابع هدف تغییر کند باز جواب بهینه استوار، با احتمال بالایی موجه و نزدیک به بهینه باقی می‌ماند.

در این روش که تقریبی از بهینه‌سازی استوار با عدم قطعیت بازه‌ای است، با در نظر گرفتن روابط (۱۶)، (۱۷)، (۱۸) و (۱۹) و اعمال آن بر روی مساله MRO، مدل  $RMRO_2$  به صورت زیر به دست می‌آید:

مقدار خود را اختیار کنند بدین ترتیب برای  $\tilde{c}_i$ ،  $\tilde{w}_i$ ،  $\tilde{v}_i$ ،  $\tilde{c}m_i$  و  $crec_i$  به ترتیب مقادیر  $\hat{c}_i + c_i$ ،  $\hat{w}_i + w_i$ ،  $\hat{v}_i + v_i$ ،  $cm_i + \hat{c}m_i$  و  $crec_i + \hat{c}rec_i$  در نظر می‌گرفته می‌شود و مساله‌ی MRO حل می‌گردد.

بر مبنای رویکرد عدم قطعیت بازه‌ای مجموع روابط (۲۱) که از آن با نام  $RMRO_1$  یاد می‌شود، مدل بهینه‌سازی استوار مساله MRO در مجموع روابط (۱۰) را ارائه می‌دهد.

$$\begin{aligned} \max \quad & A_s = \prod_{i=1}^n \left[ 1 - \left( \frac{1}{1 + [(I-1)rec_i + 1]d_{ii}} \right)^{y_i} \right] \\ \text{sto:} \quad & C \geq \sum_{i=1}^n (c_i + \hat{c}_i) y_i \\ & \sum_{i=1}^n (w_i + \hat{w}_i) y_i \leq W \\ & \sum_{i=1}^n (v_i + \hat{v}_i) y_i \leq V \\ & \sum_{i=1}^n rec_i (crec_i + \hat{c}rec_i) + \sum_{i=1}^n q_i(T) y_i (cm_i + \hat{c}m_i) \leq CM \\ & \sum_{i=1}^n rec_i \leq 1 \\ & y_i \in N \quad \forall i \\ & rec_i \geq 0 \quad \forall i \end{aligned} \tag{21}$$

این رویکرد که محافظه‌کارانه‌ترین روش بهینه‌سازی استوار است، بسیار ساده می‌باشد و الگوریتم‌های فراابتکاری برای حل مساله MRO را می‌توان برای حل آن استفاده کرد؛ اما از آنجا که بدترین حالت در نظر گرفته می‌شود، به میزان زیادی از مقدار تابع هدف کاسته می‌گردد. در ادامه یک روش بهینه‌سازی استوار که میزان محافظه‌کاری آن قابل تنظیم است برای مساله MRO توضیح داده می‌شود.

$$\begin{aligned} \max \quad & A_s = \prod_{i=1}^n \left[ 1 - \left( \frac{1}{1 + [(I-1)rec_i + 1]d_{ii}} \right)^{y_i} \right] \\ \text{s.to:} \quad & \sum_{i=1}^n c_i y_i + \beta^c (\Gamma^c) \leq C \\ & \sum_{i=1}^n w_i y_i + \beta^w (\Gamma^w) \leq W \\ & \sum_{i=1}^n v_i y_i + \beta^v (\Gamma^v) \leq V \\ & \sum_{i=1}^n crec_i rec_i (+) + \sum_{i=1}^n q_i(T) y_i (cm_i + \hat{c}m_i) + \beta^{crec} (\Gamma^{crec}) + \beta^{cm} (\Gamma^{cm}) \leq CM \end{aligned} \tag{22}$$

$$\beta^c(\Gamma^c) = \max_{\{S^c \cup \{i^c\} | S^c \subseteq J^c, |S^c| = \lfloor \Gamma^c \rfloor, i^c \in J^c \setminus S^c\}} \left\{ \sum_{i \in S^c} \hat{c}_i y_i + (\Gamma^c - \lfloor \Gamma^c \rfloor) \hat{c}_{i^c} y_{i^c} \right\}$$

$$\beta^v(\Gamma^v) = \max_{\{S^v \cup \{i^v\} | S^v \subseteq J^v, |S^v| = \lfloor \Gamma^v \rfloor, i^v \in J^v \setminus S^v\}} \left\{ \sum_{i \in S^v} \hat{v}_i y_i + (\Gamma^v - \lfloor \Gamma^v \rfloor) \hat{v}_{i^v} y_{i^v} \right\}$$

$$\beta^w(\Gamma^w) = \max_{\{S^w \cup \{i^w\} | S^w \subseteq J^w, |S^w| = \lfloor \Gamma^w \rfloor, i^w \in J^w \setminus S^w\}} \left\{ \sum_{i \in S^w} \hat{w}_i y_i + (\Gamma^w - \lfloor \Gamma^w \rfloor) \hat{w}_{i^w} y_{i^w} \right\}$$

$$\beta^{crec}(\Gamma^{crec}) = \max_{\{S^{crec} \cup \{i^{crec}\} | S^{crec} \subseteq J^{crec}, |S^{crec}| = \lfloor \Gamma^{crec} \rfloor, i^{crec} \in J^{crec} \setminus S^{crec}\}} \left\{ \sum_{i \in S^{crec}} cr\hat{c}_i rec_i + (\Gamma^{crec} - \lfloor \Gamma^{crec} \rfloor) cr\hat{c}_{i^{crec}} rec_{i^{crec}} \right\}$$

$$\beta^{cm}(\Gamma^{cm}) = \max_{\{S^{cm} \cup \{i^{cm}\} | S^{cm} \subseteq J^{cm}, |S^{cm}| = \lfloor \Gamma^{cm} \rfloor, i^{cm} \in J^{cm} \setminus S^{cm}\}} \left\{ \sum_{i \in S^{cm}} q_i(T) cm\hat{m}_i y_i + (\Gamma^{cm} - \lfloor \Gamma^{cm} \rfloor) q_i(T) cm\hat{m}_{i^{cm}} y_{i^{cm}} \right\}$$

$$\sum_{i=1}^n rec_i \leq 1$$

$$y_i \in N \quad \forall i$$

$$rec_i \geq 0 \quad \forall i$$

که این مدل با مدل زیر معادل است:

$$\max \quad A_s = \prod_{i=1}^n \left[ 1 - \left( \frac{1}{1 + [(I-1)rec_i + 1]d_{ii}} \right)^{y_i} \right]$$

$$s.to : \quad \sum_{i=1}^n c_i y_i + \sum_{i \in J^c} p_i^c + \omega^c \Gamma^c \leq C$$

$$\sum_{i=1}^n w_i y_i + \sum_{i \in J^w} p_i^w + \omega^w \Gamma^w \leq W$$

$$\sum_{i=1}^n v_i y_i + \sum_{i \in J^v} p_i^v + \omega^v \Gamma^v \leq V$$

$$\sum_{i=1}^n crec_i y_i + \sum_{i=1}^n cm_i y_i + \sum_{i \in J^{crec}} p_i^{crec} + \sum_{i \in J^{cm}} p_i^{cm} + \omega^{cm} \Gamma^{cm} + \omega^{crec} \Gamma^{crec} \leq CM(T) \quad (23)$$

$$\omega^c + p_i^c \geq \hat{c}_i y_i \quad \forall i \in J^c$$

$$\omega^w + p_i^w \geq \hat{w}_i y_i \quad \forall i \in J^w$$

$$\omega^v + p_i^v \geq \hat{v}_i y_i \quad \forall i \in J^v$$

$$\omega^{crec} + p_i^{crec} \geq cr\hat{c}_i y_i \quad \forall i \in J^{crec}$$

$$\omega^{cm} + p_i^{cm} \geq cm\hat{m}_i y_i \quad \forall i \in J^{cm}$$

$$p_i^c \geq 0 \quad \forall i \in J^c$$

**اثبات:**

به منظور اثبات معادل بودن دو مدل (۲۲) و (۲۳) فرض کنید به ازای یک  $\Gamma^c$  و  $y^*$  داده شده،  $\beta^c(y^*, \Gamma^c)$  به صورت زیر باشد:

$$\beta^c(y^*, \Gamma^c) = \max_{\{S^c \cup \{i^c\} | S^c \subseteq J^c, |S^c| = \lfloor \Gamma^c \rfloor, i^c \in J^c \setminus S^c\}} \sum_{i \in S^c} \hat{c}_i y_i^* \quad (24)$$

پس واضح است که  $\beta^c(y^*, \Gamma^c)$  با جواب بهینه زیر برابر است:

$$\max \quad \beta^c(y^*, \Gamma^c) = \sum_{i \in J^c} \hat{c}_i y_i^* z_i^c \quad (25)$$

$$s.to : \quad \sum_{i \in J^c} z_i^c \leq \Gamma^c$$

$$0 \leq z_i^c \leq 1 \quad \forall i \in J^c$$

$$p_i^w \geq 0 \quad \forall i \in J^w$$

$$p_i^v \geq 0 \quad \forall i \in J^v$$

$$p_i^{crec} \geq 0 \quad \forall i \in J^{crec}$$

$$p_i^{cm} \geq 0 \quad \forall i \in J^{cm}$$

$$y_i \in N \quad \forall i$$

$$rec_i \geq 0 \quad \forall i$$

$$\sum_{i=1}^n rec_i \leq 1$$

$$\omega^c, \omega^w, \omega^v, \omega^{crec}, \omega^{cm} \geq 0$$

دوگان مساله (۲۵) به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \min \quad & \beta^c (y^*, \Gamma^c) = \sum_{i \in J^c} p_i^c + \omega^c \Gamma^c \\ \text{s.t.} \quad & \omega^c + p_i^c \geq \hat{c}_i y_i^* \\ & p_i^c \geq 0 \quad \forall i \in J^c \\ & \omega^c \geq 0 \end{aligned} \quad (26)$$

لذا بدیهی است که جواب بهینه (۲۴) با (۲۵) و آن نیز با (۲۶) برابر است و بدین ترتیب می‌توان برای محدودیت‌های مربوط به روابط

#### ۴. نتایج تجربی

به منظور بررسی تجربی مساله MRO، مثال ارائه شده در کاسترو و کاولکا [۱۲] که در آن پارامترها قطعی در نظر گرفته شده‌اند تحت شرایط غیر قطعی بودن مجدداً در نظر گرفته شده است. در این نمونه مثال یک سیستم تولیدی متشکل از پنج زیر سیستم می‌باشد که هر زیر سیستم می‌تواند حاوی جزء یا اجزاء اضافی باشد که مشخصات این اجزاء در جدول ۱ ارائه شده است..

جدول ۱. مشخصات مربوط به زیرسیستم‌ها [۱۲]

Subsystem	MTBF	MTTR	Design Cost	Weight	Volume	Corrective maintenance cost	Corrective maintenance resources cost
۱	۵۰۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۵	۶۰	۷
۲	۵۵۰	۳۵	۵۵	۴۵	۵۰	۴۰	۳
۳	۶۰۰	۴۰	۵۵	۸۰	۷۰	۴۵	۴
۴	۷۵۰	۳۰	۴۰	۳۵	۳۵	۳۰	۲
۵	۵۰۰	۳۰	۶۰	۷۰	۶۰	۵۰	۵

با آن که مقدار تابع هدف حاصل از حل مدل MRO بیشترین مقدار را به خود اختصاص داده است اما به ازای تغییر کوچکی در پارامترها، جواب به دست آمد به طور کلی ناموجه خواهد بود. از طرف دیگر مقادیر بدست آمده برای مدل  $RMRO_1$  همواره موجه می‌باشد ولی کاهش قابل ملاحظه‌ای در مقدار تابع هدف نسبت به مدل MRO دیده می‌شود.

این در حالی است که بسیاری از موارد عدم قطعیت موجود در داده‌ها به طور هم زمان رخ نمی‌دهند به همین علت در نظر گرفتن بدترین حالت برای آن‌ها در این گونه مسائل قطعاً بهترین راه ممکن نخواهد بود.

بنابراین به کمک مدل  $RMRO_2$  و با در نظر گرفتن تعداد درجه‌ی محافظه‌کاری ۳ (از ۵) برای تمامی  $\Gamma$ ها نتایجی به دست آمده است که گرچه مقدار تابع هدف آن نسبت به مدل MRO کاهش یافته است اما این مقدار اختلاف نسبت به تفاوت بین تابع هدف مدل‌های  $MRO$  و  $RMRO_1$  به مراتب کمتر است. بدیهی است اختلاف اندک در تابع هدف به ازای پذیرش ریسک ناموجه بودن جواب حاصل از مدل  $RMRO_1$  است.

به منظور محاسبه‌ی احتمال ناموجه بودن جواب حاصل از مدل  $RMRO_1$  تابع توزیع داده‌های غیرقطعی یکنواخت فرض می‌شود و با ۱۰۰۰۰ بار شبیه‌سازی به بررسی احتمال نقض هر یک از محدودیت‌ها پرداخته شده است که نتیجه در جدول ۴ ارائه می‌شود.

$T$  برابر ۱۰۰ واحد (که هم واحد با  $MTBF$  و  $MTTR$  می‌باشد) فرض می‌شود و حدود محدودیت‌های سیستم به ترتیب عبارتند از  $C=1000$ ،  $W=1000$ ،  $V=1000$  و  $CM(T)=500$  می‌باشند و مقادیر تغییر در داده‌ها برای شرایط غیرقطعی، ۴۰٪ مقدار مشخص شده‌ی قطعی آن‌ها در جدول ۱ در نظر گرفته می‌شود که این تغییرات در جدول ۲ ارائه شده است..

جدول ۲. میزان تغییرات داده‌های غیر قطعی

	$\hat{C}_i$	$\hat{W}_i$	$\hat{V}_i$	$\hat{cm}_i$	$\hat{crec}_i$
۱	۲۰	۲۰	۲۲	۲۴	۲.۸
۲	۲۲	۱۸	۲۰	۱۶	۱.۲
۳	۲۲	۳۲	۲۸	۱۸	۱.۶
۴	۲۰	۱۴	۱۴	۱۲	۰.۸
۵	۲۴	۲۸	۲۶	۲۰	۲

با قطعی در نظر گرفتن داده‌های جدول ۱ مدل MRO و غیرقطعی در نظر گرفتن همین داده‌ها توسط جدول ۲ مدل  $RMRO_1$  (مدل ۲۱) و  $RMRO_2$  (مدل ۲۳ درجه‌ی محافظه‌کاری ۳ از ۵) به کمک نرم‌افزار GAMS حل شده است که مقادیر متغیر تصمیم و جواب بهینه هر یک از مدل‌ها از قرار جدول ۳ می‌باشد.

<sup>1</sup> Mean Time Between Failure

<sup>2</sup> Mean Time To Repair

جدول ۳. نتایج حل مدل‌های  $RMRO_1$ ،  $RMRO_2$  و  $MRO$ 

Subsystems	Redundancies	Corrective maintenance resources (% of all available resources)		
		MRO		
۱	۳	۳۴,۸	۱	۳
۲	۵	۰,۰	۲	۵
۳	۳	۲۴,۲	۳	۳
۴	۳	۱۲,۶	۴	۳
۵	۴	۰,۰	۵	۴
<b>Availability</b>		۹۹,۹۷	۰۷,۳۰	<b>Availability</b>
<b>Feasibility</b>		۰,۰۰	۱۰۰	<b>Feasibility</b>

## منابع

- [1] Castro, H.F., Cavalca, K.L., *Reliability Optimization of Redundant System*. SAE Tech Papers, Danvers, MA, USA 2002;1(1):1-9.
- [2] Kumar, A., Pathak, R.M., Gupta, Y.P., *Genetic-Algorithm-Based Reliability Optimization for Computer Network Expansion*. IEEE Trans Reliab 1995;44(1): pp. 63-72.
- [3] Painton, L., Campbell, J., *Genetic Algorithm in Optimization of System Reliability*. IEEE Trans Reliab 1995;44(2):172-8.
- [4] Rubinstein, R.Y., Levitin, G., Lisnianski, A., Ben-Haim H. *Redundancy Optimization of Static Series-parallel Reliability Models Under Uncertainty*. IEEE Trans Reliab 1997;46(4):503-11.
- [5] Levitin, G., *Redundancy Optimization for Multi-State System with Fixed Resource-Requirements and Unreliable Sources*. IEEE Trans Reliab 2001;50(1):52-9.
- [6] Levitin, G., *Optimal Allocation of Elements in Linear Multi-State Sliding Window System*. Reliab Eng Syst Saf 2002;76:247-55.
- [7] Coit, D.W., Smith, A.E., *Reliability Optimization of Series-Parallel System Using a Genetic Algorithm*. IEEE Trans Reliab 1996;45(2):254-66.
- [8] Levitin, G., Lisnianski, A., Ben-Hain, H., Elmakis, D., *Redundancy Optimization for Multi-State System*. IEEE Trans Reliab 1998;47(2): 165-72.
- [9] Lisnianski, A., Levitin, G., Ben-Hain, H., *Structure optimization of multistate system with time redundancy*. Reliab Eng Syst Saf 2000;67: 103-12.
- [10] Levitin, G., Lisnianski, A., *Joint Redundancy and Maintenance Optimization for Multistate Series-Parallel systems*. Reliab Eng Syst Saf 1999;64: pp. 33-42.
- [11] Castro, H.F., Cavalca, K.L., *Availability Optimization with Genetic Algorithm*. Int J Qual Reliab Manage 2003;20(7):847-63.
- [12] Castro, H.F., Cavalca, K.L., *Maintenance Resources Optimization Applied to a Manufacturing System*. Reliab Eng Syst Saf 2005;91:413-20.

جدول ۴. احتمال نقض محدودیت‌ها در مدل  $RMRO_2$ 

Condition	Number	Probability %
(DC)۱	۱۵۳	۱,۵۳
(W)۲	۶۵	۰,۶۵
(V)۳	۵۴	۰,۵۴
(CREC & CM)۴	۱	۰,۰۱

بدین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت که در درجه‌ی محافظه‌کاری ۳، در بدترین حالت حدود ۲/۷ درصد امکان ناموجه بودن جواب به دست آمده از این روش وجود دارد لذا با توجه به میزان افزایش در تابع هدف، پذیرش این ریسک معقول به نظر می‌رسد. لازم به ذکر است که به منظور افزایش سطح دسترسی به دست آمده از مدل  $RMRO_1$  تا سطح دسترسی حاصل از مدل  $RMRO_2$  نیازمند به افزایشی در حدود ۲۴۰ واحد در مقدار CM هستیم. به عبارت دیگر باید میزان منابع مربوطه را به حدود ۱/۵ برابر حالت فعلی تغییر دهیم که مقدار قابل توجهی به نظر می‌رسد و توجیه اقتصادی ندارد.

## ۵. نتیجه‌گیری

همواره یکی از دغدغه‌های اصلی مشاوران صنعتی و کارشناسان طراحی سیستم‌ها، تخصیص بهینه منابع نگهداری و تعمیرات و تعیین تعداد اجزاء اضافی برای هر یک از اجزاء سیستم به منظور بالا بردن سطح دسترسی آن می‌باشد. با توجه به این که مساله با هزینه‌های گوناگونی نظیر هزینه طراحی، هزینه استفاده از منابع و غیره در ارتباط است و این هزینه‌ها اکثراً مقادیر غیر قطعی است، دستیابی به جواب بهینه استوار برای آن از اهمیت بالایی برخوردار است. در این مقاله با استفاده از رویکرد بهینه‌سازی استوار برای مدل عدم قطعیت بودجه‌ای، به جواب بهینه استوار رسیدیم که درجه محافظه‌کاری آن قابل تنظیم است و میزان جذابیت آن با استفاده از شبیه‌سازی تایید شد. اعمال نقش ارزش زمانی پول در مدل‌سازی مساله، توسعه‌ی روش‌های فرا ابتکاری به منظور حل این مساله و همچنین بررسی عدم قطعیت در MTBF و MTTR می‌توانند به عنوان مواردی برای مطالعات آتی مطرح گردند.



- [13] Dantzig, G. B., "Linear Programming Under Uncertainty". Mgmt. Sci. 197-206, 1955.
- [14] Ertas, A., The engineering design process. London:Wiley; 1993, P. 525.
- [15] Wohl, J.G., *System Operational Readiness and Equipment Dependability*. IEEE Trans Reliab 1966; R-15(1):1-6.
- [16] Soyster, A.L., "Convex Programming with Set-Inclusive Constraints and Applications to Inexact Linear Programming", Oper. Res. 21, 1973, pp.1154-1157.
- [17] Ben-Tal, A., Nemirovski, A.: "Robust Solutions of Linear Programming Problems Contaminated with Uncertain Data", Mathematical Programming. 88, 2000, pp. 411-424.
- [18] Ben-Tal, A., Nemirovski, A., "Robust Solutions to Uncertain Programs", Operations Research Letters 25, 1999, pp. 1-13.
- [19] Ben-Tal, A., Nemirovski, A.: "Robust Convex Optimization", Mathematical Operations Research, 23, 1998, pp. 769-805.
- [20] El-Ghaoui, L., Lebret, H., "Robust Solutions to Least-Square Problems to Uncertain Data Matrices", SIAM J. Matrix Anal. Appl. 18, 1997, pp. 1035-1064.
- [21] El-Ghaoui, L., Oustry, F., Lebret, H., "Robust solutions to Uncertain Semidefinite Programs", SIAM J. Optim. 9, 1998, pp. 33-52.
- [22] Kouvelis, P., Yu, G.: "Robust Discrete Optimization and its Applications", Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA. 1997.
- [23] Bertsimas, D., Sim, M., "The Price of the Robustness", Operations Research, Vol(52)- 2004 , pp:35-53
- [24] Bertsimas, D., Sim, M., "Robust Discrete Optimization and Network Flows", Mathematical Programming, Vol(98)- 2002, pp49-71