نشریه بین المللی علوم مهندسی دانشگاه علم و صنعت ایران، شماره ۷، جلد ۱۹، سال ۱۳۸۷، صفحه ۸۱-۷۵
مهندسی شیمی، ریاضی و کامپیوتر

RANKING EFFICIENT UNITS BY WEAKENED REFERENCES IN DATA ENVELOPMENT ANALYSIS

Mohammad Reza Alirezaee
Iran University of Science and Technology
mralirez@iust.ac.ir

Abolfazl Keshvari
Iran University of Science and Technology
abkeshvari@iust.ac.ir

Abstract: This paper presents a model for ranking efficient units by a new approach. In the proposed method, the idea of excluding the unit being scored from the production possibility set is changed to the idea of weakening the unit being scored. We propose a model for ranking efficient DMUs that is more efficient and less problematic than the models based on excluding the under evaluation unit.

رتبه‌بندی واحدهای کارا در تحلیل پوششی‌داده‌ها از طریق تضعیف واحد تحت بررسی در مجموعه امکان تولید

محمدرضا علیرضائی و ابوالفضل کشوری

چکیده: اساس کار مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها ارزیابی کارایی واحدهای تحت مطالعه است. با این کار واحدهای تحت مطالعه از لحاظ موقعیت قرار گرفتن نسبت به مرز کارایی تقسیم بندی می‌شوند. با این حال برای طبقه بندی واحدهایی که کارا شناخته می‌شوند باید از مدل‌های رتبه بندی استفاده کرد. رتبه‌بندی واحدهای کارا براساس روش حذف واحد تحت بررسی در مجموعه امکان تولید با مشکلاتی مواجه است، چرا که برای بعضی از واحدها و نیز در بعضی شرایط خاص مدل نشدنی شده و یا جواب مناسبی ارائه نمی‌دهد. در این مقاله به جای حذف واحد تحت بررسی، موقعیت قرار گرفتن آن به عنوان مرجع را تضعیف می‌کنیم تا از بروز مشکلات روش مذکور جلوگیری شود.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها؛ رتبه بندی؛ حذف واحد تحت بررسی

۱. مقدمه

چارنز[2]، کوپر[3] و رودز[4] در سال ۱۹۷۸ [۱] مدل CCR را برای ارزیابی کارایی واحدهای تحت مطالعه ارائه دادند. مدل CCR یک مدل ناپارامتری برای ارزیابی کارایی است که مرز کارایی[5] آن با مقایسه وضعیت واحدهای تحت مطالعه[6] شکل می‌گیرد. فارل[7] در سال ۱۹۵۷ [۲] مفهوم مدل‌های ناپارامتری ارزیابی کارایی را مطرح کرده بود، اما تا قبل از معرفی مدل CCR این مفهوم گسترش چندانی پیدا نکرد. پس از آن در سال‌های بعد، این مدل مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفت و مطالعات بسیاری در این زمینه انجام شد. بنکر[8]، چارنز و کوپر در سال ۱۹۸۴ [۳] مفهوم بازده به مقیاس[9] را در طراحی مدل BCC به کار بردند. مرز کارایی مدل BCC براساس بازده به مقیاس متغیر ایجاد می‌شود. پس از آن در طی چند سال مقالات متعددی درباره تحلیل پوششی داده‌ها منتشر شد [۴].

تاریخ وصول: ۸۶/۴/۲۰
تاریخ تصویب: ۸۷/۷/۷

دکتر محمدرضا علیرضائی، عضو هیات علمی دانشکده ریاضی، دانشگاه علم و صنعت ایران، mralirez@iust.ac.ir
ابوالفضل کشوری، دانشکده ریاضی، دانشگاه علم و صنعت ایران abkeshvari@iust.ac.ir

[2] *Charnes*
[3] *Cooper*
[4] *Rhodes*
[5] *Efficiency frontier*
[6] *Decision Making Units (DMU)*
[7] *Farrell*
[8] *Banker*
[9] *Returns to scale*

در تمامی مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها[1]، برای هر واحد تحت مطالعه عددی به عنوان مقدار کارایی[2] به دست می‌آید و بر اساس آن، واحدهای تحت مطالعه به دو دستهٔ کلی کارا[3] و ناکارا[4] تقسیم می‌شوند.

واحدهای ناکارا دارای کارایی کمتر از یک و واحدهای کارا دارای کارایی برابر یک هستند (عدد یک، قراردادی برای کران بالای کارایی در تحلیل پوششی داده‌ها است، به راحتی می‌توان هر مقدار مثبت دیگری را به جای آن به کار برد، مبحث کامل این مطلب در [۱] بیان شده است).

اندرسون[5] و پیترسون[6] در سال ۱۹۹۳ [۵] به موضوع رتبه بندی واحدهای کارا پرداختند. آنها از این ایده استفاده کردند که واحد کارا را از مجموعه امکان تولید مدل حذف کردند و تغییرات مرز کارایی را در دو حالت ۱- بدون حضور واحد کارا و ۲- با حضور واحد کارا، مبنای ارزیابی مجدد و رتبه‌بندی واحد کارا قرار دادند. پس از آن نیز مطالعات دیگری درباره رتبه بندی با همین دیدگاه انجام شد و براساس دیدگاه‌های متفاوت، روش‌های مختلفی برای رتبه بندی واحدهای کارا طراحی شد.

با توجه به اینکه در این مقاله روش حذف واحد تحت بررسی و مشکلات آن مورد بررسی قرار گرفتند در جهت اصلاح آن مدل جدیدی ارائه می‌شود در ادامه از مجموعه مدلهایی که براساس روش حذف واحد تحت بررسی بنیان نهاده شده‌اند مدل اندرسون و پیترسون به عنوان مدل پایه‌ای این دیدگاه در محاسبات و ارزیابی‌های این مقاله استفاده خواهد شد.

مدل رتبه بندی اندرسون-پیترسون دارای دو مشکل اساسی است. در این مقاله روش اندرسون-پیترسون برای رتبه بندی واحدهای کارا و مشکلات ناشی از آن مطرح شده و تکنیکی برای اصلاح مدل اندرسون-پیترسون ارائه می‌شود.

ساختار مقاله به صورت زیر است: بخش اول با معرفی مفهوم واحدهای خود مرجع، واحدهای تحت مطالعه را طبقه بندی می‌کند. تعریف‌های اصلی و نمادها در این بخش ارائه شده‌اند. در بخش دوم مدل اندرسون-پیترسون و مشکلات آن بیان شده‌اند. مدل اندرسون-پیترسون با حذف واحدهای خود مرجع رتبه آنها را تعیین می‌کند. در بخش سوم، مدل اندرسون-پیترسون با تضعیف واحدهای خود مرجع (به جای حذف واحدهای خود مرجع) اصلاح می‌شود. بخش چهارم نتیجهٔ مطالب مطرح شده در مقاله بیان می‌شود.

[1] *Data Envelopment Analysis (DEA)*
[2] *Efficiency*
[3] *Efficient*
[4] *Inefficient*
[5] *Andersen*
[6] *Petersen*

۲. واحدهای خود مرجع

در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها با حل یک برنامه‌ریزی‌خطی برای هر واحد تحت مطالعه، ترکیبی مخروطی[7] (در مدل BCC ترکیبی محدب[8]) از واحدهای تحت مطالعه به دست می‌آید و به عنوان مرجع آن معرفی می‌شود. واحد تحت مطالعه j ام را با $u_j=(y_j,-x_j)$ نشان می‌دهیم که $y_j=(y_{1j},y_{2j},...,y_{sj})$ و $x_j=(x_{1j},x_{2j},...,x_{mj})$. فضای شدنی مساله DEA را با PPS [9] و اعضای مجموعهٔ PPS را با $u=(y,-x)$ نشان می‌دهیم. واضح است که $u_j\in PPS \quad (\forall j=1,...,n)$.

به مدل CCR دقت کنید:

$$\min \quad z=\theta-\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m}s_i^-+\sum_{r=1}^{s}s_r^+\right)$$
$$s.t.$$
$$\begin{cases}\theta x_{ip}-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}-s_i^-=0 & \forall i\\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rp}-s_r^+=y_{rp} & \forall r\\ \lambda_j,s_i^-,s_r^+\geq 0\end{cases} \qquad \text{(CCR)}$$

تعریف‌های زیر برای مدل CCR بیان شده‌اند، و بطور مشابه برای مدل‌های دیگر، مانند BCC، نیز قابل بیان هستند.

تعریف

کارایی واحد تحت مطالعهٔ p ام را با θ^* نشان می‌دهیم که برابر است با مقدار بهینهٔ θ در مدل (CCR).

مرز کارایی PPS مجموعهٔ نقاطی از آن است که دارای کارایی ۱ می‌باشند.

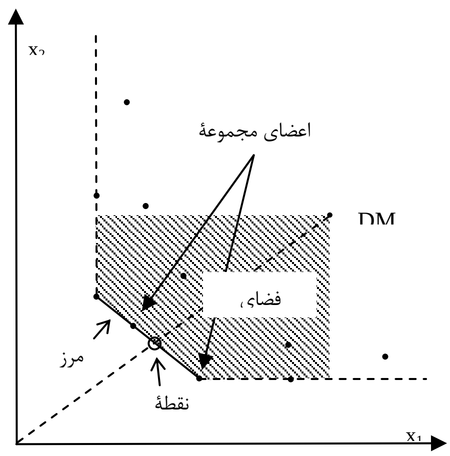
فضای غالب واحد تحت مطالعهٔ p عبارتست از مجموعهٔ نقاط u از PPS که $u\geq u_p$.

نقطهٔ مرجع[10] واحد تحت مطالعهٔ p ام را با $u(p)$ نشان می‌دهیم که نقطه‌ای از فضای غالب آن است و $u(p)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^* u_j$، بنابراین $u(p)\geq u_p$.

مجموعهٔ مراجع واحد تحت مطالعهٔ p ام را $E(p)$ نشان می‌دهیم که $E(p)=\{j:\lambda_j^*>0\}$.

این تعاریف با استفاده از مرز فارل برای واحدهایی با دو ورودی و یک خروجی، در شکل ۱ تبیین شده‌اند.

[7] ترکیبی نامنفی از مؤلفه‌ها
[8] ترکیبی نامنفی از مؤلفه‌ها که مجموع ضرایب برابر ۱ است.
[9] *Productivity Possibility Set*
[10] *Reference*



شکل ۱. مفاهیم مرز کارایی، فضای غالب، نقطهٔ مرجع و اعضای مجموعهٔ مراجع

واحدهای کارا مرز کارایی را شکل می‌دهند و واحدهای ناکارا درون *PPS* قرار می‌گیرند. مرجع هر واحد تحت مطالعه ترکیبی مخروطی (یا محدب) از واحدهای کارا است. واحدهای تحت بررسی را می‌توان به سه دسته اصلی زیر تقسیم کرد (تقسیم بندی اساسی واحدهای تحت مطالعه در [۷] ارائه شده است، تقسیم بندی زیر برای رسیدن به اهداف این مقاله از آن استخراج شده است):

- **واحدهای کارا:** واحدی کارا است که روی مرز کارایی قرار داشته باشد و هیچ ترکیبی مخروطی (محدب در BCC) از واحدهای دیگر (غیر از خودش) در فضای غالب آن وجود نداشته باشد.
- **واحدهای کارای ضعیف:** واحدی کارای ضعیف است که روی مرز کارایی قرار داشته باشد و ترکیبی مخروطی (محدب در BCC) از واحدهای دیگر (غیر از خودش) در فضای غالب آن وجود داشته باشد.
- **واحدهای ناکارا:** واحدی ناکارا است که روی مرز کارایی قرار نداشته باشد.

طبق تعریف بالا، واحدهای کارا روی مرز کارایی قرار دارند و به عنوان مرجع خود قرار می‌گیرند. به این واحدها، واحدهای خود مرجع می‌گوییم.

تعریف

به واحد تحت مطالعه p ام واحد خود مرجع می‌گوییم هرگاه داشته باشیم: $u(p)=u_p$.

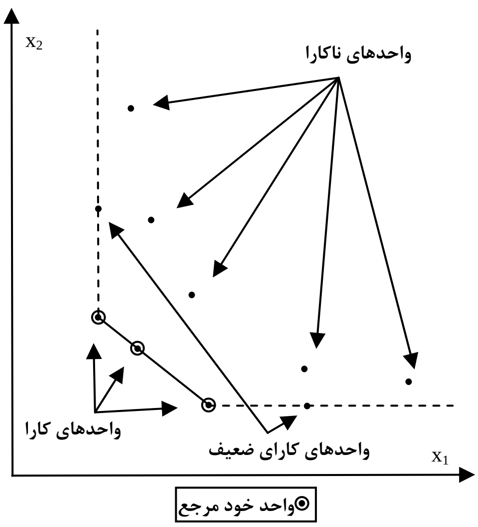
اگر واحد تحت مطالعه p ام واحد کارای راسی باشد داریم: $E(p)=\{p\}$.

اگر واحد تحت مطالعه p ام واحد کارای راسی نباشد حالات زیر ممکن است:

- $E(p)=\{p\}$ و
- $E(p)\neq\{p\}$

اما در هر حال $u(p)=u_p$. در حالت دوم برنامه‌ریزی‌خطی مربوط به واحد p دارای جواب بهینهٔ چندگانه است و جواب بهینهٔ دیگری وجود دارد به طوری که $E(p)=\{p\}$.

طبقه بندی واحدها در شکل ۲ نشان داده شده‌اند.



شکل ۲. طبقه بندی واحدهای تحت مطالعه.

۳. رتبه بندی واحدهای کارا از طریق حذف واحدهای خود مرجع

مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها امکان ارزیابی کارایی واحدهای تحت مطالعه را فراهم می‌کنند. در ارزیابی کارایی تعدادی از واحدها به عنوان واحدهای کارا شناخته می‌شوند.

تعداد واحدهای کارا به ساختار داده‌های مساله و مدل مورد استفاده بستگی دارد.

به عنوان مثال تعداد واحدهای کارای ارزیابی شده توسط مدل BCC بیشتر از تعداد واحدهای کارای ارزیابی شده توسط مدل CCR می‌باشد. در واقع نوع مرز کارایی و یا به عبارت دقیقتر نوع بازده به مقیاس مدل مورد استفاده باعث تغییر تعداد واحدهای کارا می‌شود. اندرسون و پیترسون مدلی را برای رتبه بندی واحدهای کارا ارائه دادند که به مدل AP شناخته می‌شود. آنها برای رتبه بندی واحد p ام، آنرا از مجموعهٔ واحدهای تحت مطالعه حذف کرده و مدل را برای مابقی واحدها حل کردند. به مدل AP (متناظر با مدل CCR) دقت کنید:

$$\min \quad z=\theta-\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+\right)$$
$$s.t.$$
$$\begin{cases} (1).\quad \theta x_{ip}-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n}\lambda_j x_{ij}-s_i^-=0 \quad \forall i \\ (2).\quad \sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n}\lambda_j y_{rj}-s_r^+=y_{rp} \quad \forall r \\ \lambda_j, s_i^-, s_r^+\geq 0 \end{cases} \qquad \text{(AP-0)}$$

دقت کنید که در مدل AP-0 واحد p در تولید مرجع واحد p نقشی ندارد. بنابراین می‌توان مدل اندرسون-پیترسون را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\min \quad z=\theta-\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+\right)$$
$$s.t.$$
$$\begin{cases} (1).\quad \theta x_{ip}-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}-s_i^-=0 \quad \forall i \\ (2).\quad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj}-s_r^+=y_{rp} \quad \forall r \\ (3).\quad \lambda_p=0 \\ \lambda_j, s_i^-, s_r^+\geq 0 \end{cases} \qquad \text{(AP)}$$

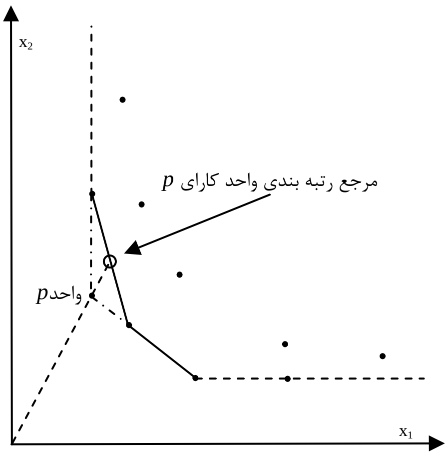
تعریف

مرجع رتبه بندی واحد p را با $u_{AP}(p)$ نشان می‌دهیم و عبارتست از $u_{AP}(p)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^* u_j$ که λ_j^* جواب بهینهٔ مدل AP است. رتبهٔ واحد p را با θ_{AP}^* نشان می‌دهیم که عبارتست از مقدار بهینهٔ θ در مدل AP. براساس تقسیم بندی واحدها در بخش قبل، می‌دانیم که اگر واحد p کارای ضعیف یا ناکارا باشد نمی‌تواند به عنوان مرجع خود قرار گیرد. به عبارت دقیقتر، اگر واحد p کارای ضعیف یا ناکارا باشد آنگاه $p\notin E(p)$. بنابراین می‌توان بدون آنکه تغییری در نتایج رتبه بندی بوجود آید قید ۳ را از مدل AP حذف کرد. در این صورت داریم:

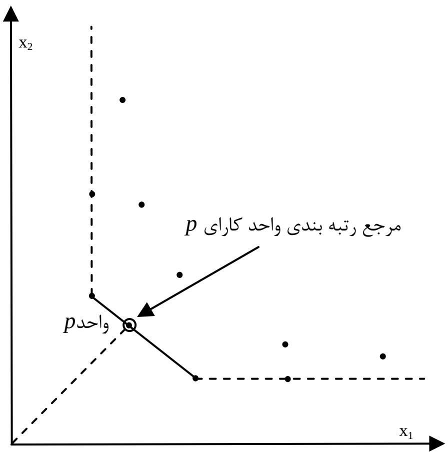
$$(AP) \quad - \quad (3) \quad = \quad (CCR)$$

در این حالت نتایج رتبه بندی با نتایج ارزیابی کارایی برابر است، یعنی $u_{AP}(p)=u(p)$ و $\theta_{AP}^*=\theta^*$.
بنابراین اگر مدل AP را برای رتبه بندی واحدهای کارای ضعیف یا ناکارا به کار ببریم، مقدار کارایی آنها را به دست می‌آوریم، و اگر مدل AP را برای رتبه بندی واحدهای کارا استفاده کنیم، رتبهٔ آنها را به دست می‌آوریم.

اگر واحد p کارای غیر راسی باشد $\theta_{AP}^*=1$ و $u_{AP}(p)=u(p)$، و
اگر واحد p کارای راسی باشد داریم: $\theta_{AP}^*>1$ و $u_{AP}(p)\neq u(p)$.
مفاهیم بالا در شکل ۳ نشان داده شده‌اند.
با وجود آنکه مدل AP در رتبه بندی واحدهای کارا توانمندی دارد اما دارای دو مشکل اساسی نیز می‌باشد. این دو مشکل با ارائه دو مثال بررسی می‌شوند.



شکل ۳ الف. رتبه بندی واحدهای کارای راسی.



شکل ۳ ب. رتبه بندی واحدهای کارای غیر راسی.

۳-۱. نشدنی بودن مدل AP برای واحدهای خاص

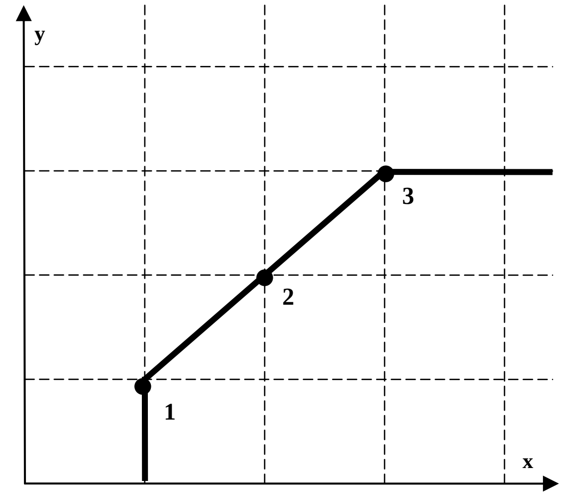
به مثال زیر دقت کنید:

مثال۱. رتبه بندی ۳ واحد تحت مطالعه با یک ورودی و یک خروجی با مدل AP مورد نظر است.

جدول ۱. داده‌های مثال ۱.

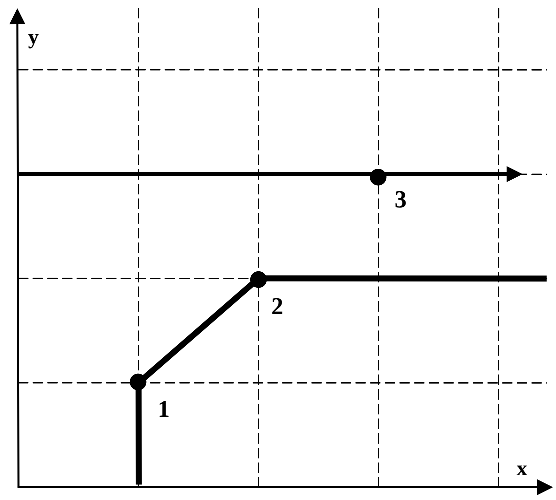
	ورودی X	خروجی Y
DMU_1	1	1
DMU_2	2	2
DMU_3	3	3

واحدهای تحت مطالعه و مرز کارایی مدل BCC در شکل ۴ نشان داده شده‌اند:



شکل ۴. واحدهای تحت مطالعه و مرز کارایی برای مثال ۱ .

فرض کنید رتبه بندی واحد ۳ مورد نظر باشد. در صورت حذف این واحد از مجموعهٔ واحدهای تحت مطالعه مرز کارایی به صورت زیر است:



شکل ۵. مرز کارایی پس از حذف واحد ۳ برای مثال ۱ .

واضح است که در این حالت خاص، مدل AP نشدنی می‌شود.

۳-۲.ارائه رتبه نامناسب توسط مدل AP در حالات خاص

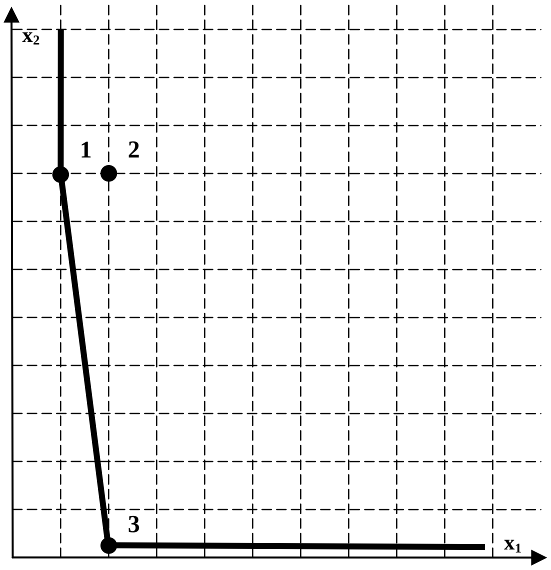
به مثال زیر دقت کنید:

مثال۲. رتبه بندی ۳ واحد تحت مطالعه با دو ورودی و یک خروجی با مدل AP با داده‌های زیر مورد نظر است.

جدول ۲. داده‌های مثال ۲.

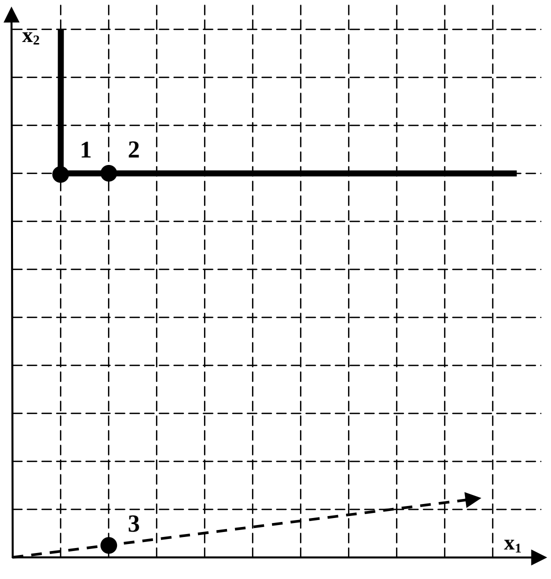
	خروجی	ورودی	
	y	x_1	x_2
DMU_1	1	1	8
DMU_2	1	2	8
DMU_3	1	2	0.2

واحدهای تحت مطالعه و مرز کارایی با در نظر داشتن بازده به مقیاس متغیر (مدل BCC) در شکل زیر نشان داده شده‌اند:



شکل ۶. واحدهای تحت مطالعه و مرز کارایی برای مثال ۲ .

فرض کنید رتبه بندی واحد ۳ مورد نظر باشد. در صورت حذف این واحد از مجموعهٔ واحدهای تحت مطالعه مرز کارایی به صورت زیر است:



شکل ۷. مرز کارایی پس از حذف واحد ۳ برای مثال ۲ .

در این حالت، رتبه بدست آمده برای واحد مورد نظر بسیار بزرگ و غیرقابل استفاده است.

نتایج رتبه بندی مثال ۲ در جدول ۵ ارائه شده است.

۴. رتبه بندی واحدهای کارا از طریق تضعیف واحدهای خود مرجع

همانطور که در بخش قبل بیان شد، در مدل AP برای رتبه بندی واحدهای تحت مطالعه، اگر واحد مورد نظر واحد خود مرجع باشد آنرا حذف کرده و مدل را برای مابقی واحدها حل می‌کنیم. در ادامه، برای رفع مشکلات مدل AP روشی ارائه می‌شود. به مدل زیر دقت کنید:

$$\min \quad z = \theta - \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+\right) + c$$

$$s.t.$$

$$\left\{\begin{array}{l} (1).\quad \theta x_{ip} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} - s_i^- = 0 \quad \forall i \\ (2).\quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{rp} \quad \forall r \\ (3).\quad \lambda_p \le c \\ \lambda_j, s_i^-, s_r^+ \ge 0 \end{array}\right. \qquad (\mathrm{AP}_c)$$

در این مدل کران بالای ضریب u_j در ترکیب مخروطی واحدهای تحت مطالعه برابر c قرار گرفته است، و c در تابع هدف به می‌نیمم می‌رسد، بنابراین مدل AP_c همیشه دارای جواب بهینه می‌باشد. با اینکار از نشدنی بودن مدل جلوگیری می‌کنیم و اگر مدل AP برای واحد p نشدنی باشد، مقدار c^* در AP_c از صفر بیشتر خواهد بود.
در ادامه به مقایسه مدل‌های AP و AP_c می‌پردازیم. θ_c^* رتبهٔ واحد p ام در مدل AP_c است.

ادامه مثال ۱. در ادامه مثال ۱، نتایج حل مدل‌های AP و AP_c را مقایسه می‌کنیم. این نتایج در جدول‌های زیر ارائه شده است.

جدول ۳. نتایج حل مثال ۱ با مدل AP براساس مدل BCC .

DMU	وضعیت مدل	θ_{AP}^*	$E(j)$	$u(j)$
1	بهین	2.0	{2}	$1\times u_2$
2	بهین	1.0	{1,3}	$0.5\times u_1 + 0.5\times u_3$
3	نشدنی	–	–	–

جدول ۴. نتایج حل مثال ۱ با مدل APc براساس مدل BCC .

DMU	وضعیت مدل	θ_c^*	$E(j)$	$u(j)$	c^*
1	بهین	2.0	{2}	$1\times u_2$	0.0
2	بهین	1.0	{1,3}	$0.5\times u_1 + 0.5\times u_3$	0.0
3	بهین	1.0	{3}	$1\times u_3$	1.0

مشاهده می‌شود که برای واحد ۳ ، مدل AP نشدنی است اما مدل AP_c دارای جواب بهینه می‌باشد. $c^*=1$ بیان می‌کند که در برنامه‌ریزی‌خطی واحد ۳ ، نمی‌توان واحد ۳ را از مجموعهٔ واحدهای تحت مطالعه حذف کرد. اما در برنامه‌ریزی‌های‌خطی مربوط به واحدهای ۱ و ۲ می‌توان آن واحدها را از مجموعهٔ واحدهای تحت مطالعه حذف کرد.

ادامه مثال ۲. مانند مثال قبل، نتایج حل مدل‌های AP و AP_c را مقایسه می‌کنیم. این نتایج در جدول‌های زیر ارائه شده است.

جدول ۵. نتایج حل مثال ۲ با مدل AP براساس مدل CCR .

DMU	وضعیت مدل	θ_{AP}^*	$E(j)$	$u(j)$
1	بهین	2.0	{3}	$1\times u_2$
2	بهین	0.6694	{1,3}	$0.6610\times u_1 + 0.3390\times u_3$
3	بهین	40.0	{1}	$1\times u_1$

جدول ۶. نتایج حل مثال ۲ با مدل APc براساس مدل CCR .

DMU	وضعیت مدل	θ_c^*	$E(j)$	$u(j)$	c^*
1	بهین	2.0	{3}	$1\times u_3$	0.0
2	بهین	0.6694	{1,3}	$0.6610\times u_1 + 0.3390\times u_3$	0.0
3	بهین	1.0	{3}	$1\times u_3$	1.0

در اینجا نیز ملاحظه می‌شود که رتبهٔ واحد ۳ در مدل AP_c برابر ۱ شده است در حالیکه رتبهٔ این واحد در مدل AP برابر ۴۰ شده است که کاربردهای عملی تحلیل پوششی داده‌ها را دچار مشکل می‌کند. مشکلات موجود در مدل رتبه بندی AP در مدل AP_c وجود ندارد. تفاوت رتبهٔ بعضی از واحدها در این دو مدل از آنجا ناشی می‌شود که مدل AP_c از نشدنی بودن برنامه‌ریزی‌های‌خطی جلوگیری می‌کند، بنابراین اگر حذف یک واحد خود مرجع باعث نشدنی مدل شود، مدل AP_c برای ضریب آن واحد مقدار بهینه‌ای تعیین می‌کند تا مدل شدنی باقی بماند.
با رخ دادن یکی از دو مشکل مطرح شده برای مدل AP، رتبهٔ به دست آمده از مدل AP صحیح نیست، بنابراین رتبهٔ واقعی واحد ۳ در مثال ۲ برابر ۴۰ نمی‌باشد. چرا که با حذف این واحد از مجموعهٔ واحدهای تحت مطالعه، به دلیل شعاعی بودن مدل، فاصله شعاعی واحد تا مرز کارایی سنجیده می‌شود، در حالیکه مدل AP_c برای آنکه بتواند مقدار تابع هدف را کاهش دهد، آن واحد را از مجموعهٔ واحدهای تحت مطالعه حذف نکرده است.

۵. نتیجه گیری

استفاده از مدلهایی که برای رتبه بندی واحدهای کارا اقدام به حذف واحد کارا از مجموعه امکان تولید می کنند با مشکلاتی همراه است. یکی از این مشکلات این است که برای بعضی از واحدها، برنامه‌ریزی‌خطی مربوط به آنها نشدنی شده و نمی‌توان رتبه بندی را انجام داد، و در بعضی حالات خاص به دلیل شعاعی بودن مدل، رتبه به دست آمده بسیار بزرگ است و در کاربردهای عملی غیرقابل استفاده است. در این مقاله با ارائه مفهوم واحدهای خود مرجع و تضعیف آن واحدها، مدل اندرسون و پیترسون را به عنوان نماینده این نوع خاص مدلها به صورتی اصلاح نموده ایم که با این دو مشکل مواجه نشود، و با این قابلیت کاربرد مدل رتبه بندی AP افزایش می یابد.

مراجع

[1] Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E., "*Measuring the Efficiency of Decision Making Units"*. European Journal of Operational Research, 2, 1978, pp. 429-444.

[2] Farrell MJ., "*The Measurement of Productive Eficiency"*. Journal of the Royal Statistical Society; 120(Part III): 1957, 253–78.

[3] Banker, R., Charnes, A., Cooper, W.W., *"Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis*". Management Science 30 (9), 1984, pp. 1078-1092.

[4] Seiford, L., M., *"Data Envelopment Analysis: The Evolution of the State of Art* (1975-1995)". The Journal of Productivity Analysis, 7, 1996, pp. 99-137.

[5] Andersen, P., Petersen, N., C., *"A Procedure for Ranking Efficient Units in Data Envelopment Analysis*". Management Science, 39 (10), 1993, pp. 1261-1264.

[6] Mehrabian, S., Alirezaee, M., R., Jahanshahloo, G., R., "*A Complete Efficiency Ranking of Decision Making Units in Data Envelopment Analysis*". Computational Optimization and Applications, 14, 1999, pp. 261-266.

[7] Charnes, A., Cooper, W.W., Thrall, R., M., *"A Structure for Classifying and Characterizing Efficiency and Inefficiency in Data Envelopment Analysis*". The Journal of Productivity Analysis, 2, 1991, pp. 197-237.