



# A Robust Multi-Objective Lead Time Control Problem in Complex Assembly Systems

Amir H. Shokouhi & Hamid Shahriari \*

Amir H. Shokouhi, PhD student of Industrial Eng.-KNTU

Hamid Shahriari, Assistance professor of Industrial Eng.-KNTU

## Keywords

Multiple objective,  
Robust Optimization,  
Lead Time,  
Complex Assembly

## ABSTRACT

*In this paper, a robust multi-objective model to optimally control the lead time of a complex assembly system is introduced. The system is modeled as an open queue network, whose service stations represent manufacturing or assembly operations. It is assumed that the products arrive independently according to a Poisson process. In each service station, there is either one or infinite number of servers with exponentially distributed processing time. Each service station produces uncertain but limited number of scraps which are independent from the other service stations. The transport times between the service stations are independent random variables with generalized Erlang distribution. Addressing the data uncertainty, the problem is formulated as a robust multi-objective optimal control problem that involves three types of conflicting objective functions. The types of objective functions are the total operating costs of the system per period, the average lead time and the variance of the lead time. Finally, we use the goal attainment method to solve a discrete-time approximation of the original problem to obtain the optimal service rates of the problem.*

© (نشریه بین المللی مهندسی صنایع و مدیریت تولید) شماره ۲، جلد ۲۱، ۱۳۸۹

## مساله کنترل مدت زمان ساخت چند هدفه استوار در سیستم‌های مونتاژ پیچیده

امیرحسین شکوهی و حمید شهریاری

### چکیده:

توسعه یک مدل چند هدفه استوار برای مساله کنترل بهینه‌ی مدت زمان ساخت در یک سیستم مونتاژ چند مرحله‌ای در این مقاله مورد توجه قرار گرفته است. مدل‌سازی سیستم مونتاژ به کمک شبکه‌ی باز صف انجام شده است. هر ایستگاه کاری، شامل یک یا بی‌نهایت خدمت‌دهنده بوده و تنها یک عملیات تولیدی یا مونتاژ در آن صورت می‌گیرد. فرآیند ورود قطعات، به صورت مستقل از یکدیگر و بر اساس فرآیند پواسون است و مدت زمان خدمت‌دهی ایستگاه‌ها به صورت مستقل از

### کلمات کلیدی

برنامه‌ریزی چند هدفه،  
بهینه‌سازی استوار،  
کنترل مدت زمان ساخت،  
تئوری صف،  
سیستم مونتاژی پیچیده.

تاریخ وصول: ۸۸/۴/۱۲

تاریخ تصویب: ۸۹/۲/۱۱

امیرحسین شکوهی دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی صنایع دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، a.shokouhi@dena.ac.ir

دکتر حمید شهریاری استادیار دانشکده مهندسی صنایع دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، hshahriari@kntu.ac.ir

یکدیگر بوده و از توزیع نمایی پیروی می‌کند که پارامتر آن قابل کنترل می‌باشد. هر ایستگاه، دارای ضایعات برگشت‌ناپذیر غیرقطعی کراندار و مستقل از دیگر ایستگاه‌ها می‌باشد. زمان حمل و نقل بین ایستگاه‌ها تصادفی و مستقل از یکدیگر است و از توزیع ارلنگ پیروی می‌کند. عدم قطعیت موجود در پارامترهای مساله به صورت یک مدل کنترل بهینه‌ی چندهدفه‌ی استوار پیشنهاد شده است که در آن سه تابع هدف ناسازگار شامل کمینه‌کردن هزینه‌ی عملیات دوره‌ای، کمینه‌کردن میانگین مدت زمان ساخت و واریانس مدت زمان ساخت منظور شده است. در نهایت، به منظور دستیابی به سرعت‌های بهینه سرویس‌دهی از روش پیشرفت هدف، برای حل تقریبی زمان‌گسسته‌ی مساله اصلی بهره گرفته شده است. با استفاده از مدل پیشنهادی، مساله‌ای که در سایر مقالات مرتبط نیز مورد استفاده قرار گرفته است، حل شده است که نتایج قابل توجهی در شرایط عدم قطعیت پارامترها حاصل شده است.

### ۱. مقدمه

بهینه‌سازی مسائلی که به شبکه‌های صف مربوط هستند بسیار پیچیده است. در ادبیات این موضوع، مسائل زیادی وجود دارند که به شبکه‌های صف مربوط می‌باشند، اسمیت و همکاران [۱۸]. مجموعه اهدافی که در این راستا دنبال می‌شود به طور کلی، عبارتند از: برنامه‌ریزی تولید، بهبود توان عملیاتی، کاهش زمان تاخیر موقت<sup>۱</sup> و متوسط تعداد مشتری در سیستم. چشنر و همکاران [۱۷] کنترل سرعت سرویس‌دهی در هر گره از شبکه بسته جکسون را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها برای هر گره، یک هزینه نگهداری و یک هزینه عملیات در نظر گرفتند. همچنین فرض کردند که هزینه‌ها، توابعی از فراوانی فعالیت‌هایی است که در یک گره انجام می‌شود. هدف، کمینه کردن مقدار انتظاری کل هزینه‌ها می‌باشد. تیسنگ [۲۰] کنترل بهینه ورود یک شبکه صف با دو ایستگاه را تحت محدودیت وجود تاخیر زمانی در سیستم بررسی کرده است که هدف وی ماکزیمم کردن توان عملیاتی<sup>۲</sup> سیستم می‌باشد. کرباج [۱۳] مسیریابی بهینه و مسائل مکان‌یابی را از نقطه نظر بهینه‌سازی شبکه بررسی می‌کند که تسهیلات تولیدی را به شکل یک شبکه صف محدود با یک سری شاخص‌های عملکردی چندهدفه، مدل‌سازی می‌کند. آزرین و همکاران [۱ و ۳] یک مدل جدید را برای کنترل و بهینه‌سازی سرعت‌های سرویس‌دهی و سرعت‌های ورود به ایستگاه‌های سرویس‌دهی، در یک دسته از شبکه‌های جکسون مورد بررسی قرار دادند. هدف آن‌ها بهینه‌سازی طول انتظاری مسیر شبکه و کل هزینه‌های عملیاتی ایستگاه‌های سرویس‌دهی در هر دوره می‌باشند.

در تمامی تحقیقات صورت گرفته، فرض قطعی بودن پارامترهای مدل به عنوان یک فرض اصلی در نظر گرفته شده است این در حالی است که در دنیای واقعی بسیاری از مسایل بهینه‌سازی با عدم قطعیت پارامترها مواجه هستند. به عنوان مثال در زنجیره تامین در هنگام تصمیم‌گیری‌های حیاتی، تقاضای واقعی محصولات، بازگشت

مالی، مواد مورد نیاز و دیگر منابع به صورت دقیق شناخته شده نیست. در مسائل بهینه‌سازی مربوط به شبکه‌های صف پارامترهای ورودی به هر یک از خدمت‌دهنده‌ها می‌تواند با عدم قطعیت مواجه باشد.

بدین ترتیب ممکن است جواب بهینه بدست آمده از مدل‌های ساخته شده به محض این که پارامترها، مقادیری غیر از مقدار اسمی خود بگیرند، به علت نقض چندین محدودیت، بهینه و یا حتی موجه نباشد.

این امر به یک سوال طبیعی در طراحی رویکردهایی برای یافتن جوابی بهینه که در مقابل عدم قطعیت پارامترها ایمن است، منتج می‌شود که به آن جواب‌های "استوار"<sup>۳</sup> گفته می‌شود. برای تبیین اهمیت استوار بودن جواب در کاربردهای عملی، به یک مطالعه موردی که توسط بن-تال و نمیروفسکی [۶] بر روی یک مساله بهینه‌سازی خطی از کتابخانه Net Lib انجام شده است، اشاره می‌شود.

در کاربردهای عملی برنامه‌ریزی خطی، نمی‌توان این امکان را نادیده گرفت که عدم قطعیت ناچیز در پارامترها می‌تواند جواب بهینه معمولی را از دیدگاه عملی، به طور کامل بی‌معنی کند.<sup>۴</sup>

در روش‌های کلاسیک برای در نظر گرفتن عدم قطعیت پارامترها از رویکردهای تحلیل حساسیت و برنامه‌ریزی احتمالی<sup>۴</sup> بهره می‌گیرند. در رویکرد اول تحلیل گر ابتدا از تاثیر عدم قطعیت پارامترها بر روی مدل چشم‌پوشی و متعاقباً برای صحت گذاشتن بر جواب‌های بدست آمده از تحلیل حساسیت استفاده می‌کند. تحلیل حساسیت پارامترها ابزاری برای تحلیل خوب بودن جواب است و نمی‌توان از آن برای تولید جواب‌های استوار استفاده کرد. علاوه بر آن انجام تحلیل حساسیت توأم در مدل‌هایی که به تعداد زیادی پارامتر غیرقطعی دارند، عملی نمی‌باشد.

در اواسط دهه ۱۹۵۰ دانتزیگ [۹] برنامه‌ریزی احتمالی را به عنوان یک رویکرد برای مدل کردن عدم قطعیت پارامترها معرفی کرد؛ این

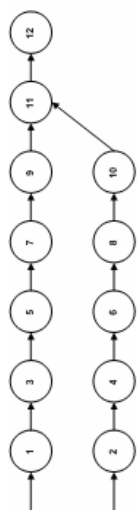
<sup>3</sup> Robust

<sup>4</sup> stochastic programming

<sup>1</sup> Sojourn time

<sup>2</sup> throughput

۷. پس از تولید هر قطعه، آن قطعه با قطعات دیگر در ایستگاه مونتاژ، مونتاژ می‌شود.
۸. محصول در گره انتهایی کامل می‌شود و سیستم را ترک می‌کند.
۹. هر قطعه دارای خصوصیتی است که از نظر آماری از دیگر قطعات مستقل است.
۱۰. هر ایستگاه سرویس‌دهی متشکل از یک یا بینهایت خدمت-دهنده است.
۱۱. زمان عملیات در ایستگاه‌های سرویس‌دهی از توزیع نمایی پیروی می‌کند.
۱۲. زمان عملیات در هر ایستگاه سرویس‌دهی مستقل از زمان عملیات‌های قبلی است.
۱۳. وقفه‌ای در عملیات به علت شکست، تعمیرات یا دیگر موارد این‌چنینی وجود ندارد.
۱۴. قاعده سرویس‌دهی براساس روش FIFO می‌باشد.
۱۵. ظرفیت صف همه‌ی ایستگاه‌ها نامحدود هستند.
۱۶. زمان‌های حمل بین ایستگاه‌های سرویس‌دهی، متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع‌های ارلنگ هستند.
۱۷. شبکه صف در حالت پایدار قرار دارد.
۱۸. ظرفیت ایستگاه به وسیله سرعت سرویس‌دهی آن ایستگاه کنترل می‌شود.
۱۹. سرعت‌های سرویس‌دهی متغیرهای پله‌ای<sup>۱</sup> هستند.
۲۰. هزینه‌های عملیاتی هر ایستگاه سرویس‌دهی در هر دوره یک تابع صعودی از سرعت سرویس‌دهی آن ایستگاه می‌باشد.
۲۱. تعداد کل ایستگاه‌های سرویس‌دهی که در گره‌های شبکه‌ی صف قرار دارند برابر با  $M$  است.



با تکمیل یک عملیات مونتاژ، در صورت وجود حداقل یک قلم واحد از هر قطعه، خدمت‌دهنده به صورت آنی مونتاژ بعدی را شروع می‌کند؛ در غیر این صورت قطعات باید برای ورود قطعه‌ای که وجود

رویکرد سناریوهایی با احتمالات مختلف را برای رخ دادن پارامترها، فرض می‌کرد. در این رویکرد موجه بودن یک جواب با استفاده از محدودیت‌های شانس بیان می‌شود. سه مشکل اصلی برای این رویکرد وجود دارد: (الف) شناخت توزیع دقیق پارامترهای غیرقطعی و در نتیجه کمی کردن سناریوهایی که از این توزیع‌ها حاصل می‌شوند در عمل دشوار است، (ب) محدودیت‌های شانس ویژگی محذب بودن مساله اصلی را از بین می‌برد و بر پیچیدگی آن به مقدار زیادی می‌افزاید (ج) ابعاد مدل بهینه‌سازی بدست آمده به صورت نجومی با زیاد شدن تعداد سناریوها افزایش می‌یابد، که چالش‌های محاسباتی عمده‌ای را موجب می‌گردد.

رویکرد دیگری که در سال‌های اخیر برای مقابله با عدم قطعیت پارامترها معرفی شده است، بهینه‌سازی استوار می‌باشد. در این رویکرد به دنبال جواب‌های نزدیک به بهینه‌ای هستیم که با احتمال بالایی موجه باشند. به عبارت دیگر با کاهش مقدار بهینگی تابع هدف، موجه بودن جواب بدست آمده را تضمین می‌کنیم. البته در مورد عدم قطعیت در ضرایب تابع هدف، با کمی تغییر در مقدار بهینه تابع هدف، به دنبال جوابی هستیم که با احتمال بالایی جواب‌های واقعی بهتر (در اینجا با توجه به تابع هدف که کمینه کردن است، کمتر) از جواب اولیه باشند.

در این مقاله با نگرش بهینه‌سازی استوار یک مدل تقریبی برای کنترل و بهینه‌سازی سرعت سرویس‌دهی (ظرفیت) در هر گره در یک سیستم مونتاژ چند مرحله‌ای و در راستای اهداف آزر و همکاران [۱]، ارائه می‌شود.

## ۲. سیستم‌های مونتاژ پویای چندمرحله‌ای

هر سیستم مونتاژ پویای چندمرحله‌ای را می‌توان به شکل یک شبکه صف باز، مدل کرد که در هر گره یک ایستگاه سرویس‌دهی قرار می‌گیرد و به عنوان یک عملیات مونتاژ یا تولید تلقی می‌شود. فرضیات زیر در نظر گرفته می‌شود:

۱. هر قسمت مجزا از محصول، تحت فرآیند پواسان با پارامتر  $\lambda$  وارد سیستم تولید می‌شود.
۲. تنها یک نوع محصول تولید می‌شود.
۳. ایستگاه سرویس‌دهی با یک یال ورودی، یک ایستگاه تولیدی محسوب می‌شود.
۴. ایستگاه سرویس‌دهی با بیش از یک یال ورودی، یک ایستگاه مونتاژ تلقی می‌شود.
۵. هر قطعه پس از ورود به سیستم، مستقیماً به ایستگاه تولید می‌رود تا عملیات تولیدی روی آن انجام شود. اگر قطعه‌ی دیگری در حین تولید باشد، قطعه جدید در صف قرار می‌گیرد.
۶. بعد از تکمیل فرآیند در ایستگاه تولیدی، قطعه به یک ایستگاه دیگر می‌رود تا تحت عملیات بعدی قرار گیرد.

<sup>۱</sup> Stepwise

**مرحله ۳.** در این مرحله تابع توزیع طولانی‌ترین مسیر در شبکه احتمالی بدست آمده در مرحله قبل به وسیله روش کالکرانی و همکاران [۱۴] مشخص می‌شود. اگر  $G = (V, A)$  را یک شبکه‌ی احتمالی در نظر بگیرید که در آن  $V$  نشان‌دهنده‌ی مجموعه‌ی گره‌ها و  $A$  نشان‌دهنده‌ی یال‌ها یا عملیات تولیدی سیستم پویای مونتاژ بعد از تغییر شکل می‌باشند. گره‌های ابتدایی و انتهایی به ترتیب با  $s$  و  $t$  نشان داده شده‌اند. طول یال  $a$  که  $a \in A$  است، متغیری تصادفی با توزیع نمایی و پارامتر  $\lambda_a$  است. برای  $a \in A$ ،  $\alpha(a)$  را اولین گره از یال  $a$  و  $\beta(a)$  را آخرین گره از یال  $a$  در نظر بگیرید. آزر و همکاران [۳] تعاریف زیر را که در این مقاله نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد بیان نموده‌اند.

**تعریف ۱:**  $I(v)$  و  $O(v)$  به ترتیب مجموعه‌ای از یال‌های ورودی و خروجی گره  $v$  هستند و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$I(v) = \{a \in A : \beta(a) = v\} \quad v \in V, \quad (2)$$

$$O(v) = \{a \in A : \alpha(a) = v\} \quad v \in V, \quad (3)$$

**تعریف ۲:** اگر  $X \subset A$  و  $s \in X^c$  باشد و  $t \in X^c$  باشد که  $X^c$  مکمل مجموعه‌ی  $X$  است، آنگاه برش  $(s, t)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(X, \bar{X}) = \{a \in A : \alpha(a) \in X, \beta(a) \in \bar{X}\}. \quad (4)$$

$(s, t)$  یک برش مستقیم یکنواخت<sup>۲</sup> (UDC) نامیده می‌شود، اگر  $(X, \bar{X})$  تهی باشد.

**تعریف ۳:** اگر  $D = E \cup F$  یک UDC از شبکه باشد آنگاه آن را یک حدفاصل قابل قبول<sup>۴</sup> می‌دانیم اگر برای هر  $a \in F$  داشته باشیم  $I(\beta(a)) \subset F$ .

**تعریف ۴:** هر یک از عملیات در زمان  $t$  می‌تواند در یکی از حالت‌های فعال، تاخیری<sup>۵</sup> یا بیکار باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

۱. فعال: به عملیاتی گفته می‌شود که در زمان  $t$  در حال اجرا باشد.

۲. تاخیری: عملیاتی در زمان  $t$  در حالت تاخیر است که تکمیل شده باشد اما حداقل یک عملیات تکمیل نشده در آن وجود داشته باشد.

۳. بیکار: یک عملیات در زمان  $t$  بیکار محسوب می‌شود اگر نه در حالت فعال و نه در حالت تاخیری باشد.

ندارد صبر کنند. ایستگاه مونتاژ یک سیستم صف چند ورودی  $M/M/1$  است و مشخصه‌ی برجسته‌اش نوع خاصی سرویس‌دهی دسته‌ای است که در آن هر دسته شامل یک واحد از هر قطعه می‌باشد. هاریسون [۱۲] نشان داده است که ایجاد یک روش تحلیلی همزمان‌سازی و تنظیم جریان‌های ورودی غیرتجدیدی، به منظور یافتن توزیع مدت زمان ساخت در سیستم‌های مونتاژ چندمرحله‌ای غیرممکن است و لذا تحلیل گران از تخمین توزیع مدت زمان ساخت استفاده می‌کنند.

با توجه به فرضیات مدل نحوه‌ی ورود به ایستگاه‌های تولید که مقدم بر ایستگاه مونتاژ است، دارای فرایند پواسان با پارامتر  $\lambda$  است. این امر نشان می‌دهد که ورود قطعات به هر گره مونتاژ، فرآیندی پواسان با سرعت  $\lambda$  است. هر دو گره در شبکه‌ی صف با یک سیستم مونتاژ پویای چندمرحله‌ای مرتبط می‌شود، یعنی شبکه، یک درخت است و بنابراین زمان‌های انتظاری در ایستگاه‌های سرویس‌دهی مستقل‌اند، لموین [۱۵].

### ۳. تحلیل طولانی‌ترین مسیر در شبکه‌های صف

مهمترین مراحل تحلیل طولانی‌ترین مسیر در شبکه‌های صف عبارتند از

**مرحله ۱.** تعیین تابع چگالی زمان انتظار (شامل زمان عملیات و زمان انتظار در صف) در هر ایستگاه سرویس‌دهی.

۱.۱. اگر ایستگاه سرویس‌دهی  $m$ ، تنها دارای یک ماشین باشد، آنگاه مدت زمان صرف شده مشابه سیستم صف  $M/M/1$  است.

$$w_m(t) = (\mu_m - \lambda) e^{-(\mu_m - \lambda)t}, \quad t > 0 \quad (1)$$

که  $\lambda$  و  $\mu_m$  به ترتیب نرخ ورود و نرخ سرویس‌دهی در سیستم صف هستند. بنابراین توزیع زمان انتظار در  $m$  امین ایستگاه سرویس‌دهی، توزیع نمایی با پارامتر  $(\mu_m - \lambda)$  می‌باشد.

۲.۱. اگر در ایستگاه سرویس‌دهی  $i$  بینهایت ماشین وجود داشته باشد، آنگاه مدت زمان صرف شده در این سیستم صف  $M/M/\infty$  از توزیع نمایی با پارامتر  $\mu_m$  پیروی خواهد کرد زیرا هیچ صفی وجود نخواهد داشت.

**مرحله ۲.** با تبدیل هر گره که شامل ایستگاه سرویس‌دهی است به یال احتمالی نظیر سیستم صف به یک شبکه احتمالی هم‌ارز<sup>۱</sup> تبدیل می‌شود. طول هر یال برابر است با زمانی که در ایستگاه سرویس‌دهی مربوطه صرف می‌شود. برای جزئیات بیشتر به آزر و مدرس [۲] مراجعه شود. پس از تبدیل تمام گره‌ها به یال‌های احتمالی، سیستم صف به یک شبکه‌ی احتمالی هم‌ارز تبدیل شده است.

<sup>2</sup> Cut

<sup>3</sup> Uniformly Directed Cut

<sup>4</sup> Admissible 2-partition

<sup>5</sup> Dormant

<sup>1</sup> Equivalent Stochastic Network

می‌توان اثبات کرد که  $\{X(t), t \geq 0\}$  یک فرآیند مارکوف در فضای حالت  $\bar{S}$  با زمان پیوسته است. اعضای ماتریس گذار این فرآیند مارکوف که با  $Q = [q\{(E, F), (E', F')\}]$  نشان داده می‌شود به گونه‌ای که  $(E, F)$  و  $(E', F') \in \bar{S}$  و  $F$  به ترتیب UDF عملیات‌های فعال و تاخیر هستند که توسط کالکولاری و همکاران [۱۲] به شکل زیر معرفی شده‌اند:

$$q\{(E, F), (E', F')\} = \begin{cases} \lambda_a & \text{if } a \in E, I(\beta(a)) \not\subset F \cup \{a\}, E' = E - \{a\}, F' = F \cup \{a\}; \\ \lambda_a & \text{if } a \in E, I(\beta(a)) \subset F \cup \{a\}, E' = (E - \{a\}) \cup O(\beta(a)), \\ & F' = F - O(\beta(a)); \\ -\sum_{a \in E} \lambda_a & \text{if } E = E', F = F'; \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= Q \cdot P(t), \\ P(0) &= [0, 0, \dots, 1]^T \end{aligned} \quad (7)$$

از روابط معرفی شده در بخش ۳ به منظور ساخت مدل بهینه‌سازی در بخش بعد استفاده می‌شود.

#### ۴. مساله کنترل مدت زمان ساخت چندهدفه

در این بخش یک مدل تحلیلی برای کنترل بهینه‌ی سرعت سرویس‌دهی در ایستگاه‌های سرویس‌دهی به کار گرفته می‌شود. ممکن است ما با ازدیاد منابع، سرعت سرویس‌دهی ایستگاه‌های تولید و مونتاژ را زیاد کنیم. در این مورد، میانگین مدت زمان ساخت کاهش خواهد یافت. اما این به وضوح موجب هزینه‌های عملیاتی بیشتری در هر دوره می‌شود.

در نتیجه ایجاد تعادل مناسب بین متوسط مدت زمان ساخت و هزینه‌ها، لازم است. واریانس مدت زمان ساخت نیز باید در مدل مورد توجه قرارگیرد زیرا وقتی فقط روی متوسط زمان ساخت متمرکز شویم سرعت‌های سرویس‌دهی ممکن است بهینه نباشند چون مدت‌های ساخت می‌توانند به علل تصادفی تغییرات داشته باشند.

برای دستیابی به هدف ذکر شده، یک مساله‌ی چندهدفه توسط آزرین و همکاران [۳] ارائه شده که در آن سه هدف کمینه کردن کل هزینه‌های عملیاتی سیستم در هر دوره، کمینه کردن میانگین مدت زمان ساخت و کمینه کردن واریانس مدت زمان ساخت مدنظر قرار گرفته شده است. هزینه عملیاتی  $i$  امین ایستگاه کاری در هر دوره یک تابع صعودی  $C_m(\mu_m)$  در نظر گرفته شده است

مجموعه حالت‌های فعال و تاخیری به ترتیب با  $Y(t)$  و  $Z(t)$  نشان داده می‌شود و  $X(t) = (Y(t), Z(t))$ . حال اگر  $S$  مجموعه‌ای از تمام برش‌های شبکه باشد که دارای حداقل قابل قبول هستند می‌توان  $\bar{S} = S \cup \{(\phi, \phi)\}$  در نظر گرفت، که  $X(\phi, \phi)$  بیانگر آن است که  $Y(t) = \phi$  و  $Z(t) = \phi$  یعنی تمام عملیات‌ها در زمان  $t$  در حالت بیکاری هستند و بنابراین محصول نهایی تکمیل شده در زمان  $t$  سیستم را ترک می‌کند.

$\{X(t), t \geq 0\}$  یک فرآیند مارکوف زمان پیوسته جاذب در حالت محدود<sup>۱</sup> است و چون  $q\{(\phi, \phi), (\phi, \phi)\} = 0$  یک حالت جاذب است و به طور وضوح دیگر حالات گذرا<sup>۲</sup> هستند. علاوه بر آن حالت‌های  $\bar{S}$  را به گونه‌ای شماره گذاری می‌کنیم که ماتریس  $Q$  تبدیل به یک ماتریس بالا مثلثی شود.

فرض می‌شود که این حالات به صورت  $1, 2, \dots, N$  شماره‌گذاری شوند که  $N$  برابر تعداد کل حالات  $\bar{S}$  است. حالت ۱ حالت ابتدایی<sup>۳</sup> است که با  $X(t) = (O(s), \phi)$  نشان داده می‌شود و حالت  $N$ ، حالت جاذب است که با  $X(t) = (\phi, \phi)$  نشان داده می‌شود. فرض کنید  $T$  نشان دهنده طول بلندترین مسیر در شبکه یا مدت زمان ساخت است.

واضح است که  $T = \min\{t > 0: X(t) = N | X(0) = 1\}$  بنابراین  $T$  زمانی است که طول می‌کشد تا  $\{X(t), t \geq 0\}$  جذب آخرین مرحله که از ۱ شروع شده است، شود.

برای محاسبه  $F(t) = P\{T \leq t\}$  یا تابع توزیع مدت زمان ساخت می‌توان روابط رو به عقب چاپمن-گولمگروف را به کار برد. بدین ترتیب اگر  $P_i(t)$  به صورت زیر تعریف شود:

$$P_i(t) = P\{X(t) = N | X(0) = i\}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (6)$$

خواهیم داشت  $F(t) = P_1(t)$ .

آزرین و همکاران [۱] سیستم روابط دیفرانسیلی<sup>۴</sup> برای بردار  $P(t) = [P_1(t), P_2(t), \dots, P_N(t)]^T$  را به صورت زیر ارائه دادند:

<sup>1</sup> Finite-State Absorbing Continuous-Time Markov Process

<sup>2</sup> Transient

<sup>3</sup> Initial

<sup>4</sup> Differential Equation

کلی این روش نیاز به تعیین اهداف و اوزان دارد یعنی باید  $b_j$  و  $c_j$  برای هر سه تابع هدف مشخص شود. بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \min \quad & z \\ \text{S.t.:} \quad & \sum_{i=1}^n C_i(\mu_i) - c_1 z \leq b_1, \\ & \int_0^{\infty} (1 - P_1(t)) dt - c_2 z \leq b_2, \\ & \int_0^{\infty} t^2 \dot{P}_1(t) dt - \left[ \int_0^{\infty} t \dot{P}_1(t) dt \right]^2 - c_3 z \leq b_3, \\ & \dot{P}(t) = Q(\mu) \cdot P(t), \\ & P_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ & P_N(t) = 1, \\ & \mu_m \geq \lambda + \varepsilon, \quad m \in B, \\ & \mu_m \geq \varepsilon, \quad m \in C, \\ & \mu_m \in S_m, \quad m = 1, 2, \dots, M, \\ & P(t), z \geq 0. \end{aligned} \quad (12)$$

حل این مساله با زمان پیوسته به وسیله روش‌های تحلیلی خیلی پیچیده است. بنابراین سعی می‌شود که از روش تقریبی استفاده شود. بدین منظور سیستم زمان پیوسته به صورت گسسته در می‌آید و مساله کنترل بهینه به یک برنامه‌ریزی غیرخطی معادل، تبدیل می‌شود به بیان دیگر روابط دیفرانسیلی در مجموعه روابط (۱۲) به روابط تفاضلی<sup>۲</sup> و عبارات انتگرال به عبارات مجموع<sup>۳</sup> تبدیل شده است. برای پیشبرد این روش، زمان به  $K$  بخش مساوی با طول  $\Delta t$  تقسیم شده است.

اگر  $\Delta t$  به اندازه‌ی کافی کوچک باشد می‌توان فرض کرد که  $P(t)$  تنها در زمان‌های  $0, \Delta t, \dots, (K-1)\Delta t$  تغییر می‌کند. بنابراین اگر  $P(k\Delta t)$  یا مقدار  $k$  امین  $P$  با  $P(k)$  نشان داده شود، سیستم زمان پیوسته  $\dot{P}(t) = Q(\mu) \cdot P(t)$  به سیستم زمان گسسته تبدیل می‌شود.

$$P(k+1) = P(k) + Q(\mu) \cdot P(k) \Delta t, \quad k = 0, 1, \dots, K-1 \quad (13)$$

بدین ترتیب مدل برنامه‌ریزی غیرخطی عدد صحیح مرکب<sup>۴</sup> که تقریباً معادل با مدل اصلی می‌باشد حاصل می‌گردد که به کمک آن  $\mu = [\mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_n^*]^T$  یا بردار کنترل بهینه به دست می‌آید.

که  $\mu_m$  سرعت سرویس‌دهی آن ایستگاه می‌باشد. بنابراین  $C$  یا کل هزینه‌های عملیاتی سیستم در هر دوره به شکل زیر قابل محاسبه است:

$$C = \sum_{m=1}^M C_m(\mu_m). \quad (8)$$

آزرون و همکاران [۳] بر موردی تمرکز کرده‌اند که در آن ظرفیت تولید برای انتخاب‌های گسسته فراهم است. مثلاً وقتی تعدادی ماشین یا کارگر یا یک شیفت کاری اضافه می‌شود. ظرفیت از طریق سرعت سرویس‌دهی در هر گره کنترل می‌شود. بنابراین هر سرعت سرویس‌دهی باید از یک سری انتخاب‌های گسسته مرتبط به هم انتخاب شود.

با در نظر گرفتن  $S_i$  به عنوان سری انتخاب‌ها برای  $i$  امین سرعت سرویس‌دهی  $(\mu_m \in S_m)$ ، به عناصر ماتریس گذار  $Q$  یک مقادیر ثابت اختصاص پیدا نمی‌کند بلکه تابعی از بردارهای کنترل  $\mu = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n]^T$  می‌باشد. از این رو مدل پویای غیرخطی به صورت زیر پیشنهاد شده است:

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= Q(\mu) \cdot P(t), \\ P_i(0) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \\ P_N(t) &= 1. \end{aligned} \quad (9)$$

حال چنانچه  $B$  مجموعه گره‌های شامل ایستگاه‌های سرویس‌دهی  $M/M/1$  و  $C$  مجموعه گره‌های شامل ایستگاه‌های سرویس‌دهی  $M/M/\infty$  باشد به منظور پایدار نگه داشتن سیستم از روابط زیر بهره گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} \mu_m &> \lambda, \quad m \in B, \\ \mu_m &> 0, \quad m \in C. \end{aligned} \quad (10)$$

چنین ساختاری در برنامه‌ریزی ریاضی وجود ندارد. بنابراین در مساله‌ی چندهدفه نهایی از روابط زیر به عنوان جایگزین روابط (۱۰) استفاده می‌شود.

$$\begin{aligned} \mu_m &\geq \lambda + \varepsilon, \quad m \in B, \\ \mu_m &\geq \varepsilon, \quad m \in C. \end{aligned} \quad (11)$$

با در نظر گرفتن روابط (۱۱) به کمک "روش پیشرفت هدفمند"<sup>۱</sup> مدل کنترل مدت زمان ساخت چند هدفه معرفی شده است. به طور

<sup>2</sup> Difference Equations

<sup>3</sup> Summation

<sup>4</sup> Mixed Integer Non-Linear Programming

<sup>1</sup> Goal Attainment Method

$$\begin{aligned}
 \min \quad & z \\
 \text{S.t.} : \quad & \sum_{i=1}^n C_i(\mu_i) - c_1 z \leq b_1, \\
 & \sum_{k=0}^{K-1} k \Delta t (P_1(k+1) - P_1(k)) - c_2 z \leq b_2, \\
 & \sum_{k=0}^{K-1} (k \Delta t)^2 (P_1(k+1) - P_1(k)) - \left[ \sum_{k=0}^{K-1} k \Delta t (P_1(k+1) - P_1(k)) \right]^2 - c_3 z \leq b_3, \\
 & P(k+1) = P(k) + Q(\mu) \cdot P(k) \Delta t, \quad k = 0, 1, \dots, K-1, \\
 & P_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\
 & P_N(k) = 1, \quad k = 0, 1, \dots, K, \\
 & P_i(k) \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, k = 0, 1, \dots, K, \\
 & \mu_i \geq \lambda + \varepsilon, \quad i \in B, \\
 & \mu_i \geq \varepsilon, \quad i \in C, \\
 & \mu_m = \sum_{j=1}^{|S_i|} \alpha_{mj} y_{mj}, \quad m = 1, 2, \dots, M, \\
 & \sum_{j=1}^{|S_i|} y_{mj} = 1, \quad m = 1, 2, \dots, M, \\
 & P(k), z \geq 0.
 \end{aligned} \tag{14}$$

فرض بر این است که قطعاتی که قطعه یا قطعات متناظرشان در ایستگاه مونتاژ جزء ضایعات قرار گرفته است، خود به نوعی ضایعات در نظر گرفته می‌شوند.

اگر  $q(i, j, m)$ ، ماتریسی سه‌بعدی با درایه‌های  $-1$ ،  $0$  و  $1$  باشد و به صورت زیر تعریف شود:

- اگر  $i \neq j$  : در تغییر از حالت  $i$  به  $j$ ، درایه‌ی مربوط به ایستگاه‌های سرویس‌دهی که فعالیت آن‌ها به پایان رسیده است مقدار ۱ بگیرد.
- اگر  $i = j$  :  $q(i, i, m) = -\sum_{k \neq i} q(i, k, m), \quad \forall m$ .

آنگاه می‌توان ماتریس  $Q_\gamma$  را تعریف کرد:

$$Q_\gamma(i, j) = \sum_m q(i, j, m) \gamma_m = \sum_m \sum_n q(i, j, m) O(m, n) \varphi_n \tag{17}$$

به منظور وارد کردن ضایعات در مدل (۱۴) ماتریس  $Q'$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q'(\mu) = Q_\mu(\mu) - (Q_\lambda - Q_\gamma) = Q(\mu) + Q_\gamma \tag{18}$$

و بدین ترتیب رابطه‌ی (۱۳) به شکل زیر تغییر خواهد کرد:

$$P(k+1) = P(k) + Q(\mu) \cdot P(k) \Delta t + Q_\gamma \cdot P(k) \Delta t, \quad k=0, 1, \dots, K-1 \tag{19}$$

با توجه به فرضیات حاکم بر مساله، نرخ ورود یا پارامتر توزیع ورود به سیستم،  $\lambda$  می‌باشد و از آنجا که در کلیه‌ی ایستگاه‌ها فرض بر عدم وجود ضایعات بوده است لذا پر واضح است که نرخ ورود به تمامی ایستگاه‌ها  $\lambda$  خواهد بود. حال اگر فرض بر آن باشد که هر ایستگاه دارای ضایعات بازگشت‌ناپذیر مخصوص به خود است که با  $\gamma_m$  نشان داده می‌شود، نرخ ورود به هر ایستگاه سرویس‌دهی لزوماً برابر  $\lambda$  نخواهد بود. لذا می‌توان نرخ ورود به ایستگاه سرویس‌دهی  $m$  ام را با  $\lambda_m$  نشان داد و در حالت کلی می‌توان نوشت:

$$\lambda_m = \lambda - \gamma_m, \tag{15}$$

که  $\gamma_m$  میزان ضایعات ایستگاه‌های سرویس‌دهی قبل و مرتبط با ایستگاه سرویس‌دهی  $m$  تعریف می‌شود. حال اگر ارتباط بین ایستگاه‌ها با یکدیگر بر اساس فرآیند تولید با ماتریس  $O(m, n)$  نشان داده شود، می‌توان مقدار  $\gamma_m$  را برای ایستگاه‌های سرویس‌دهی از رابطه‌ی زیر محاسبه کرد:

$$\gamma_m = \sum_n O(m, n) \varphi_n \tag{16}$$

که  $\varphi_n$  بیان‌گر میزان ضایعات ایستگاه  $n$  ام است که مستقل از ضایعات دیگر ایستگاه‌ها فرض می‌شود. لازم به ذکر است در اینجا

که با جایگزین کردن رابطه‌ی (۱۹) با محدودیت نظیرش در مدل (۱۴) و بسط محدودیت مربوط به پایداری با استفاده از رابطه‌ی

(۱۵)، مدل (۲۰) پدید می‌آید.

$$\begin{aligned}
 \min \quad & z \\
 S.t.: \quad & \sum_{i=1}^n C_i(\mu_i) - c_1 z \leq b_1, \\
 & \sum_{k=0}^{K-1} k \Delta t (P_1(k+1) - P_1(k)) - c_2 z \leq b_2, \\
 & \sum_{k=0}^{K-1} (k \Delta t)^2 (P_1(k+1) - P_1(k)) - \left[ \sum_{k=0}^{K-1} k \Delta t (P_1(k+1) - P_1(k)) \right]^2 - c_3 z \leq b_3, \\
 & P_i(k+1) = P_i(k) + \sum_j \left[ Q(i, j) + Q_\gamma(i, j) \right] P_j(k) \Delta t, \quad k = 0, 1, \dots, K-1 \\
 & P_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\
 & P_N(k) = 1, \quad k = 0, 1, \dots, K, \\
 & P_i(k) \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, k = 0, 1, \dots, K, \\
 & \mu_m \geq \lambda - \gamma_m, \quad i \in B, \\
 & \mu_m \geq 0, \quad i \in C, \\
 & \mu_m = \sum_{j=1}^{|S_m|} \alpha_{mj} y_{mj}, \quad m = 1, 2, \dots, M, \\
 & \sum_{j=1}^{|S_m|} y_{mj} = 1, \quad m = 1, 2, \dots, M, \\
 & P(k), z \geq 0.
 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\tilde{\varphi}_m = \varphi_m - \hat{\varphi}_m \xi_m, \quad -1 \leq \xi_m \leq 1 \quad \forall m \tag{21}$$

که در آن  $\xi_m$  یک متغیر تصادفی بین -۱ و +۱ است که نوسان در داده‌ها را نشان می‌دهد. به این حالت که در آن همه عناصر بردار نوسان  $\xi_m$  می‌توانند در بازه [-۱, ۱] تغییر کنند، مدل عدم قطعیت بازه‌ای می‌گویند. این روش بهینه‌سازی استوار در برنامه‌ریزی خطی برای اولین بار توسط سوپرستر [۱۹] ارائه شد. از آنجا که این روش به بهینه‌سازی بدترین حالت می‌پردازد، به عنوان یک روش به شدت محافظه‌کارانه شناخته می‌شود. در این روش فرض می‌شود که برای همه‌ی پارامترهای غیرقطعی بدترین حالت می‌تواند رخ دهد. به عبارت دیگر در مساله‌ی مورد بررسی  $\tilde{\varphi}_m$  کمترین مقدار ممکن را اختیار می‌کند. بدین ترتیب نرخ ورود به هر یک از ایستگاه‌ها افزایش می‌یابد که پایداری سیستم صف و مقادیر میانگین و واریانس را با تغییر در مقادیر  $P(k)$  دست‌خوش تغییرات غیر مطلوب می‌کند. از آنجا که در این روش بهینه‌سازی استوار، می‌خواهیم بدترین حالت بهینه شود، لذا مقدار  $\lambda_m$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lambda_m = \lambda - \gamma_m = \lambda - \gamma_m + \sum_{n \neq m} O(m, n) \hat{\varphi}_n, \tag{22}$$

حال مساله‌ی MOLTCP به کمک روابط (۲۰) و (۲۲) مدل‌سازی می‌شود.

مدل معرفی شده در مجموعه روابط (۲۰) در صورتی معتبر است که پارامترهای آن به صورت قطعی معلوم باشند. چنانچه میزان ضایعات در هر ایستگاه،  $\varphi_n$ ، غیر قطعی باشد؛ اعتبار مدل زیر سوال می‌رود. برای رویارویی با این عدم قطعیت از بهینه‌سازی استوار استفاده می‌شود.

### ۵. مساله کنترل مدت زمان ساخت چندهدفه استوار

برای دستیابی به یک جواب استوار برای مساله کنترل مدت زمان ساخت چند هدفه (MOLTCP)<sup>۱</sup>، مساله کنترل مدت زمان ساخت چندهدفه استوار (RMOLTCP)<sup>۲</sup> با استفاده از دو رویکرد بهینه‌سازی استوار ارایه می‌شود.

#### ۵-۱. مدل استوار برای عدم قطعیت بازه‌ای

فرض کنید میزان ضایعات در ایستگاه‌های سرویس‌دهی متغیرهای تصادفی مستقل  $\tilde{\varphi}_m$  باشند که در بازه‌ی  $[\varphi_m - \hat{\varphi}_m, \varphi_m + \hat{\varphi}_m]$  یک توزیع متقارن دارند.  $\Psi_m$  مجموعه ماشین‌های مرتبط به ماشین  $m$  است که  $\tilde{\varphi}$  آنها غیرقطعی می‌باشد. بنابراین می‌توان میزان ضایعات در هر ایستگاه را به شکل زیر نشان داد:

<sup>1</sup> Multi-Objective Lead Time Control Problem (MOLTCP)

<sup>2</sup> Robust Multi-Objective Lead Time Control Problem (RMOLTCP)



$$\begin{aligned}
 \min \quad & z \\
 \text{S.t.} \quad & \sum_{i=1}^n C_i(\mu_i) - c_1 z \leq b_1, \\
 & \sum_{k=0}^{K-1} k \Delta t (P_1(k+1) - P_1(k)) - c_2 z \leq b_2, \\
 & \sum_{k=0}^{K-1} (k \Delta t)^2 (P_1(k+1) - P_1(k)) - \left[ \sum_{k=0}^{K-1} k \Delta t (P_1(k+1) - P_1(k)) \right]^2 - c_3 z \leq b_3, \\
 & P_i(k+1) = P_i(k) + \sum_j \left[ Q(i, j) + Q_j(i, j) - \sum_m \sum_n q(i, j, m) O(m, n) \hat{\varphi}_n \right] P_j(k) \Delta t, \quad k=0, 1, \dots, K-1 \\
 & P_i(0) = 0, \quad i=1, 2, \dots, N-1, \\
 & P_N(k) = 1, \quad k=0, 1, \dots, K, \\
 & P_i(k) \leq 1, \quad i=1, 2, \dots, N-1, k=0, 1, \dots, K, \\
 & \mu_m \geq \lambda - \gamma_m + \sum_{n \neq m} O(m, n) \hat{\varphi}_n, \quad m \in B, \\
 & \mu_m \geq 0, \quad m \in C, \\
 & \mu_m = \sum_{j=1}^{|S_m|} \alpha_{mj} y_{mj}, \quad m=1, 2, \dots, M, \\
 & \sum_{j=1}^{|S_m|} y_{mj} = 1, \quad m=1, 2, \dots, M, \\
 & P(k), z \geq 0.
 \end{aligned} \tag{۲۳}$$

این روش که محافظه کارانه‌ترین روش بهینه‌سازی استوار می‌باشد، بسیار ساده است و الگوریتم‌های فراابتکاری<sup>۱</sup> برای حل مساله MOLTCP را می‌توان برای حل آن استفاده کرد؛ ولی چون بدترین حالت را در نظر می‌گیرد، به میزان زیادی از مقدار تابع هدف کم می‌کند. در ادامه یک روش بهینه‌سازی استوار که میزان محافظه‌کاری آن قابل تنظیم است برای مساله MOLTCP توضیح داده می‌شود.

۲-۵. بهینه‌سازی استوار با استفاده از مدل عدم قطعیت بودجه‌ای

برای مقابله با عیب روش سویستر که به شدت محافظه‌کارانه عمل می‌کند، تلاش‌های زیادی صورت گرفته است. بن-تال و نیمروفسکی [۶، ۷ و ۸] و ال-قاوی [۱۰ و ۱۱] هرکدام شیوه‌هایی برای مقابله با این امر ارائه کردند. اما روش‌های پیشنهادی آن‌ها خود دارای معایبی است که باعث دشوارتر شدن مساله استوار و عدم قابلیت اعمال بر روی مسایل بهینه‌سازی با متغیرهای گسسته می‌شود. به طور خاص برای مسایل بهینه‌سازی گسسته، کوولیس و یو [۱۶] یک چارچوب بهینه‌سازی گسسته استوار ارائه کرده‌اند که به دنبال یافتن جوابی است که عملکرد بدترین وضعیت را تحت مجموعه‌ای از سناریوها برای پارامترها کمینه کند.

$$\tilde{\varphi}_m = \varphi_m - \hat{\varphi}_m \xi_m, \quad \forall m, \quad \sum_m |\xi_m| \leq \Gamma_m \tag{۲۴}$$

با اعمال این روش بر روی مساله MOLTCP مدل زیر را حاصل می‌شود.

<sup>2</sup> Non-Deterministic Polynomial Time Hard

<sup>1</sup> Meta Heuristic

$$\begin{aligned}
\min \quad & z \\
S.t.: \quad & \sum_{i=1}^n C_i (\mu_i) - c_1 z \leq b_1, \\
& \sum_{k=0}^{K-1} k \Delta t (P_1(k+1) - P_1(k)) - c_2 z \leq b_2, \\
& \sum_{k=0}^{K-1} (k \Delta t)^2 (P_1(k+1) - P_1(k)) - \left[ \sum_{k=0}^{K-1} k \Delta t (P_1(k+1) - P_1(k)) \right]^2 - c_3 z \leq b_3, \\
& P_i(k+1) = P_i(k) + \sum_j \left[ Q(i, j) + Q_\gamma(i, j) - \sum_m q(i, j, m) \beta_m(\Gamma_m) \right] P_j(k) \Delta t, \quad k = 0, 1, \dots, K-1 \\
& P_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\
& P_N(k) = 1, \quad k = 0, 1, \dots, K, \\
& P_i(k) \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, k = 0, 1, \dots, K, \\
& \mu_m \geq \lambda - \gamma_m + \beta_m(\Gamma_m), \quad m \in B, \\
& \mu_m \geq 0, \quad m \in C, \\
& \mu_m = \sum_{j=1}^{|\mathcal{S}_m|} \alpha_{mj} y_{mj}, \quad m = 1, 2, \dots, M, \\
& \sum_{j=1}^{|\mathcal{S}_m|} y_{mj} = 1, \quad m = 1, 2, \dots, M, \\
& \beta_m(\Gamma_m) = \max_{\{L_m \cup \{t_m\} | L_m \subset \Psi_m, [L_m] = \Gamma_m, t_m \in \Psi_m \setminus L_m\}} \left[ \sum_{n \in L_m} O(m, n) \hat{\varphi}_n + (\Gamma_m - [L_m]) O(m, t_m) \hat{\varphi}_{t_m} \right] \\
& P(k), z \geq 0.
\end{aligned} \tag{۲۵}$$

می‌توان نشان داد که مدل معرفی شده در مجموعه روابط (۲۵)

معادل مدل زیر می‌باشد.

$$\begin{aligned}
\min \quad & z \\
S.t.: \quad & \sum_{i=1}^n C_i (\mu_i) - c_1 z \leq b_1, \\
& \sum_{k=0}^{K-1} k \Delta t (P_1(k+1) - P_1(k)) - c_2 z \leq b_2, \\
& \sum_{k=0}^{K-1} (k \Delta t)^2 (P_1(k+1) - P_1(k)) - \left[ \sum_{k=0}^{K-1} k \Delta t (P_1(k+1) - P_1(k)) \right]^2 - c_3 z \leq b_3, \\
& P_i(k+1) = P_i(k) \sum_j \left[ Q(i, j) + \hat{Q}_\gamma(i, j) - \sum_m \left( q(i, j, m) \left[ \Gamma_m w_m + \sum_{n \in \Psi_m} \tau_{mn} \right] \right) \right] P_j(k) \Delta t, \quad k = 0, 1, \dots, K-1 \\
& P_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\
& P_N(k) = 1, \quad k = 0, 1, \dots, K, \\
& P_i(k) \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, k = 0, 1, \dots, K, \\
& \mu_m \geq \lambda - \gamma_m + \Gamma_m w_m + \sum_{n \in \Psi_m} \tau_{mn}, \quad m \in B, \\
& \mu_m \geq 0, \quad m \in C, \\
& \mu_m = \sum_{j=1}^{|\mathcal{S}_m|} \alpha_{mj} y_{mj}, \quad m = 1, 2, \dots, M, \\
& \sum_{j=1}^{|\mathcal{S}_m|} y_{mj} = 1, \quad m = 1, 2, \dots, M, \\
& w_m + \tau_{mn} \geq O(m, n) \varphi_n, \quad \forall m, n \in \Psi_m \\
& P(k), z, w_m, \tau_{mn} \geq 0.
\end{aligned} \tag{۲۶}$$

#### ۵-۲-۱. اثبات

به ازای یک مقدار  $\Gamma_m$ ،  $\beta_m(\Gamma_m)$  با جواب بهینه به دست آمده از مدل زیر برابر است.

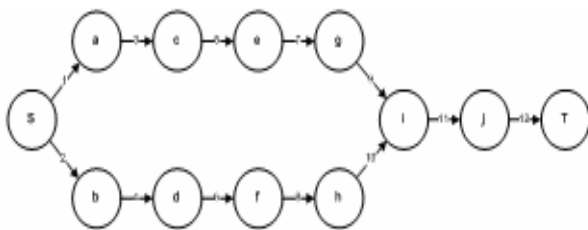
با توجه به محدودیت‌ها و متغیرهای اضافه شده، در مدل (۲۶) تعداد متغیرها و محدودیت‌های اضافه شده نسبت به مدل (۲۰) به ترتیب

$$L + M \text{ و } L \text{ می‌باشد که } L = \sum_{m=1}^M |\Psi_m| \text{ است.}$$

جدول ۲ میزان ضایعات هر ایستگاه را نشان می‌دهد. شکل ۲ شبکه‌ی تصادفی معادل شبکه‌ی صف ارائه شده در شکل ۱ را نشان می‌دهد که طول یال‌های آن از یکدیگر مستقل و به صورت نمایی توزیع شده‌اند.

جدول ۲. میزان ضایعات ایستگاه‌های سرویس‌دهی

ایستگاه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
$\phi_m$	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰



شکل ۲. شبکه‌ی تصادفی سیستم مونتاژ پویا

فرآیند احتمالی  $\{X(t), t \geq 0\}$  که به آنالیز بلندترین مسیر از شبکه احتمالی مربوط است دارای ۳۸ عبارت است که به این صورت می‌باشند:

$$\{(1,2), (1,4), (1,6), \dots, (9,10^*), (11), (12), (\phi, \phi)\}$$

هدف آرمانی برای هزینه‌های عملیاتی سیستم در هر روز، برای میانگین و برای واریانس مدت زمان ساخت، به ترتیب  $b_1 = 890$  ریال،  $b_2 = 2.3$  روز و  $b_3 = 0.03$  مربع روز در نظر گرفته شده است. با توجه به آن که یک روز انحراف از میانگین مدت زمان ساخت ۱۰۰ برابر مهم‌تر از یک ریال تفاوت در کل هزینه‌های عملیاتی سیستم است و نیز دارای اهمیتی برابر با یک مربع روز اختلاف از واریانس مدت زمان ساخت است، مقادیر  $c_j$  عبارت خواهد بود از  $c_1 = 0.9804$  و  $c_2 = c_3 = 0.0098$ . مقادیر دیگر پارامترها به صورت  $\Delta t = 0.334$ ،  $K = 25$  و  $\varepsilon = 0.05$  است.

جدول ۳ سرعت‌های بهینه سرویس‌دهی یا  $\mu^*$ ها را برای  $i = 1, 2, \dots, 12$  نشان می‌دهد. جدول ۴، تابع توزیع مدت زمان ساخت در سیستم تولید را در زمان  $k\Delta t$  و  $k = 1, 2, \dots, 25$  نشان می‌دهد.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{n \in \Psi_m} O(m, n) \phi_n z_{mn} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{n \in \Psi} z_{mn} \leq \Gamma_m, \\ & 0 \leq z_{mn} \leq 1, \quad n \in \Psi_m \end{aligned} \quad (27)$$

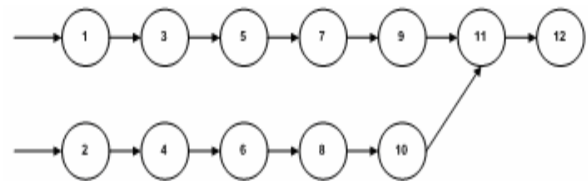
دوگان مدل (۲۷) به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \min \quad & \Gamma_m w_m + \sum_{n \in \Psi_m} \tau_{mn} \\ \text{s.t.} \quad & w_m + \tau_{mn} \geq O(m, n) \phi_n, \\ & w_m, \tau_{mn} \geq 0, \quad n \in \Psi_m \end{aligned} \quad (28)$$

از آنجا که  $\beta_m(\Gamma_m)$  با جواب بهینه (۲۷) و آن نیز با جواب به دست آمده از مدل (۲۸) برابر است، بنابراین معادل بودن مدل (۲۵) و (۲۶) نتیجه می‌شود.

## ۶. نتایج تجربی

برای بررسی عددی مساله، سیستم مونتاژ پویای معرفی شده در شکل ۱ را در نظر بگیرید که سرعت تقاضا برای هر واحد محصول برابر ۱۵ عدد در روز می‌باشد و فرض کنید تمامی ایستگاه‌های سرویس‌دهی از سیستم صف  $M/M/1$  پیروی می‌نمایند.



شکل ۱. شبکه‌ی صف سیستم مونتاژ پویا

خصوصیات ایستگاه‌های سرویس‌دهی شامل تابع مربوط به محاسبه‌ی هزینه‌ی هر واحد به ریال و مجموعه ظرفیت‌های قابل انتخاب برای هر ایستگاه سرویس‌دهی در جدول ۱ ارائه شده است.

جدول ۱. خصوصیات ایستگاه‌های سرویس‌دهی

ایستگاه سرویس‌دهی	ظرفیت‌های قابل انتخاب	$C_i(\mu_i)$
ایستگاه ۱	$\mu_1 \in \{15, 16, 17, 18\}$	$6\mu_1 + 8$
ایستگاه ۲	$\mu_2 \in \{16, 17, 18, 19\}$	$2\mu_2 + 5$
ایستگاه ۳	$\mu_3 \in \{13, 14, 15, 16\}$	$3\mu_3 + 6$
ایستگاه ۴	$\mu_4 \in \{14, 15, 16, 17\}$	$10\mu_4 + 4$
ایستگاه ۵	$\mu_5 \in \{12, 13, 14, 15\}$	$8\mu_5 + 6$
ایستگاه ۶	$\mu_6 \in \{13, 14, 15, 16\}$	$5\mu_6 + 1$
ایستگاه ۷	$\mu_7 \in \{11, 12, 13, 14\}$	$7\mu_7 + 3$
ایستگاه ۸	$\mu_8 \in \{12, 13, 14, 15\}$	$2\mu_8^2 + 4$
ایستگاه ۹	$\mu_9 \in \{10, 11, 12, 13\}$	$4\mu_9 + 5$
ایستگاه ۱۰	$\mu_{10} \in \{11, 12, 13, 14\}$	$5\mu_{10} + 7$
ایستگاه ۱۱	$\mu_{11} \in \{10, 11, 12, 13\}$	$\mu_{11}^2 + 2$
ایستگاه ۱۲	$\mu_{12} \in \{9, 10, 11, 12\}$	$2\mu_{12} + 9$

در نهایت کمینه‌ی هزینه‌های عملیاتی کل سیستم تولید در هر روز، کمینه‌ی میانگین و کمینه‌ی واریانس مدت زمان ساخت به شرح زیر به دست آمده است.

$$C = 1275 \quad E(T) = 4.561 \quad \text{Var}(T) = 0.648$$

**جدول ۳. سرعت‌های بهینه ایستگاه‌های سرویس‌دهی**

ایستگاه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
$\mu_m^*$	۱۷	۱۷	۱۵	۱۵	۱۴	۱۴	۱۳	۱۳	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲

**جدول ۴. تابع توزیع مدت زمان ساخت در سیستم تولید**

ایستگاه	۱	۲	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	
$P_m(k)$	۰	۰	.....	۰/۲۰	۰/۳۴	۰/۴۳	۰/۶۴	۰/۷۴	۰/۸۳	۰/۸۸	۰/۹۳	۰/۹۶	۰/۹۷	۰/۹۸	۰/۹۹	۰/۹۹	۱

همان‌گونه که در جواب نهایی مشاهده می‌شود، متوسط نرخ سرویس‌دهی‌های به دست آمده بیشتر از نتایج حاصل از مدل قطعی است و در همین راستا هزینه تولید و میانگین زمان ساخت افزایش و واریانس آن‌ها کاهش یافته است.

حال فرض می‌شود تغییرات ضایعات در هر ایستگاه ( $\hat{\varphi}_m$ ) به میزان داده شده در جدول ۵ باشد.

**جدول ۵. میزان تغییر در ضایعات در ایستگاه‌ها**

ایستگاه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
$\hat{\varphi}_m$	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰

با توجه به برتسیمس و سیم [۴] و با توجه به آنچه در جدول ۵ داده شده است مقدار  $\Gamma_m$  طبق جدول ۶ می‌باشد.

**۷. نتیجه‌گیری**

در این مقاله یک مدل جدید چندهدفه با در نظر گرفتن ضایعات برگشت‌ناپذیر در حالت غیرقطعی برای کنترل بهینه سرعت‌های سرویس‌دهی عملیات تولید و مونتاژ در یک سیستم مونتاژ چندمرحله‌ای پیشنهاد شده است که در آن میانگین و واریانس مدت زمان ساخت و کل هزینه‌های عملیاتی سیستم در هر دوره کمینه می‌نماید.

**جدول ۶. سطح محافظه کاری در ایستگاه‌ها**

ایستگاه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
$\Gamma_m$	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰

ابتدا در این مدل، ضایعات به عنوان عنصری قطعی در سیستم لحاظ می‌شود آنگاه از دو روش بهینه‌سازی استوار برای لحاظ کردن عدم قطعیت موجود در پارامترهای مربوط به آن بهره گرفته می‌شود. حل مساله در حالت پیوسته بسیار سخت است. بنابراین مساله به صورت تخمینی و به وسیله گسسته کردن سیستم زمان پیوسته و تبدیل مساله بهینه کنترل به یک برنامه‌ریزی غیرخطی معادل، حل می‌شود.

با توجه به مقادیر مشخص شده برای پارامترها نتایج حاصل از بهینه‌سازی استوار برای هزینه کل سیستم در یک روز، میانگین مدت زمان ساخت، واریانس مدت زمان ساخت به شرح زیر و متوسط نرخ سرویس‌دهی در ایستگاه‌ها (سرعت‌های بهینه) طبق جدول ۷ خواهد بود.

$$C = 1479 \quad E(T) = 5.134 \quad \text{Var}(T) = 0.546$$

**جدول ۷. سرعت‌های بهینه استوار ایستگاه‌های سرویس‌دهی**

ایستگاه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
$\mu_m^*$	۱۷	۱۷	۱۵	۱۵	۱۴	۱۴	۱۳	۱۳	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲

محدودیت این مدل آن است که تعداد متغیرها و محدودیت‌های برنامه‌ریزی غیرخطی چندهدفه با افزایش اندازه شبکه، به صورت نمایی افزایش می‌یابند.

متدلوژی ارائه شده در زمینه‌های زیر قابل گسترش است:

۱. استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو برای آنالیز تاثیر ورودی‌های غیرنمایی بر زمان‌های عملیات، حمل و نقل و ضایعات مربوط به آن‌ها
۲. یک روش تعاملی مانند روش تعادل ارزش جایگزین<sup>۱</sup>، STEM یا SEMOPS را می‌توان برای حل مساله کنترل مدت زمان ساخت چندهدفه استوار به کار برد.

<sup>۱</sup> The Surrogate Worth Trade-off Method

## مراجع

- [17] Schechner, Z., Yao, D., "Decentralized Control of Service Rates in a Closed Jackson Network", IEEE Transactions on Automatic Control 34, 1989, pp.236-240.
- [18] Smith, J.M., Daskalaki, S., "Buffer Space Allocation in Automated Assembly Lines", Operations Research 36, 1988, pp. 343-358.
- [19] Soyster, A.L., "Convex Programming with Set-Inclusive Constraints and Applications to Inexact Linear Programming", Operations Research 21, 1973, pp. 1154-1157.
- [20] Tseng, K., Hsiao, M., "Optimal Control of Arrivals to Token Ring Networks with Exhaustive Service Discipline", Operations Research 43, 1995, pp. 89-101.
- [1] Azaron, A., Fatemi Ghomi, S.M.T., "Optimal Control of Service Rates and Arrivals in Jackson Networks", European Journal of Operational Research 147, 2003, pp. 17-31.
- [2] Azaron, A., Modarres, M., "Distribution Function of the Shortest Path in Networks of Queues", OR Spectrum 27, 2005, pp.123-144.
- [3] Azaron, A., Katagiri, H., Kato, K., Sakawa, M. "Modelling Complex Assemblies as a Queueing Network for Lead Time Control", European Journal of Operational Research 174, 2006, pp.150-168.
- [4] Bertsimas, D., Sym, M., "The Price of the Robustness", Operations Research, 52, 2004, pp. 35-53.
- [5] Bertsimas, D., Sym, M., "Robust Discrete Optimization and Network Flows", Mathematical Programming, 98, 2002, pp. 49-71.
- [6] Ben-Tal, A., A. Nemirovski, "Robust Solutions of Linear Programming Problems Contaminated with Uncertain Data", Mathematical Programming. 88, 2000, pp. 411-424.
- [7] Ben-Tal, A., Nemirovski, A., "Robust Solutions to Uncertain Programs", Operations Research Letters 25, 1999, pp. 1-13.
- [8] Ben-Tal, A., Nemirovski, A., "Robust Convex Optimization", Mathematical Operations Research, 23, 1998, pp. 769-805.
- [9] Dantzig, G.B., "Linear programming under uncertainty", Management Science, 1998, 197-206.
- [10] El-Ghaoui, L., Lebret, H., "Robust Solutions to Least-Square Problems to Uncertain Data Matrices", SIAM J. Matrix Anal. Appl. 18, 1997, pp. 1035-1064.
- [11] El-Ghaoui, L., Oustry, F., Lebret, H., "Robust Solutions to Uncertain Semidefinite Programs", SIAM J. Optim. 9, 1998, pp. 33-52.
- [12] Harrison, J.M., "Assembly-Like Queues", Journal of Applied Probability 10, 1973, pp. 354-367.
- [13] Kerbache, L., Smith, J.M., "Multi-Objective Routing Within Large Scale Facilities Using Open Finite Queueing Networks", European Journal of Operational Research 121, 2000, pp.105-123.
- [14] Kulkarni, V., Adlakha, V., "Markov and Markov-Regenerative PERT Networks", Operations Research 34, 1986, pp. 769-781.
- [15] Lemoine, A.J., "On Total Sojourn Time in Networks of Queues", Management Science 25, 1979, pp.1034-1035.
- [16] Kouvelis, P., Yu, G., "Robust Discrete Optimization and its Applications", Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1997.