International Journal of Industrial Engineering & Production Management (2013)

International Journal of Industrial Engineering & Production Research

August 2013, Volume 24, Number 2
pp. 141-153

http://IJIEPM.iust.ac.ir/

Comparison of Metaheuristic Techniques for Portfolio Optimization under Semi-Variance Risk Criterion using t-test.

Y. Zare Mehrjerdi* **& H. Rasay**

***Yahia Zare Mehrjerdi**, Industrial Engineering Department, yazm2000@yahoo.com*
***Hassan Rasay,** Industrial Engineering Department*

Keywords

Potfolio analysis,
Semi-variance risk model,
Metaheurisctic,
model comparison,
t-test

ABSTRACT

With the introduction of mean-variance model Markowitz took a giant step in modeling and optimizing portfolio type problems. But his model is based upon some assumptions that rarely they can hold in practice. For this reason, many researchers have taken steps both theoretical and practical to make some improvements to his standard mean-variance model. Up to now different risk criteria models such as semi-variance model, the absolute deviations mean model, and the variance with skewness model are introduced by various researchers. The most famous risk criterion is semi-variance model studied well and took into consideration again in this article as well. Here, authors have taken steps to optimize the semi-variance model taking the number of the portfolio shares and the ratio of portfolio in each share as the model constraints using simulated annealing and Tabu-Search meta-heuristic approaches for optimization purposes. The efficient frontier line of main constraint is drawn and the capability of these algorithms in drawing these lines using two-sampling t- test is investigated. The model uses the historical data from DAX, Hang Seng, and S&P100 from years 2007 through2009 as its input for calculation purposes as well as model analysis

* **Corresponding author. Yahia Zare Mehrjerdi**
Email: *yazm2000@yahoo.com*

نشـــریه بین المللـــی مهنـدسی صنـایع و مدیـــریت تولیـد

شمـــاره ۲، جلـــد ۲۴، شهـــریور ۱۳۹۲
صفحـــــه ۱۵۳-۱۴۲

نشریه بین المللی مهندسی صنایع و مدیریت تولید
دانشگاه علم و صنعت ایران

ISSN: 2008-4870

http://IJIEPM.iust.ac.ir/

مقایسه روش های فراابتکاری برای بهینه سازی پورتفولیو تحت معیار ریسک نیمه واریانس با استفاده از آزمون آماری t

یحیی زارع مهرجردی* و حسن رسایی

کلمات کلیدی

مدل میانگین – واریانس
مدل نیمه واریانس
الگوریتم جستجوی ممنوع
الگوریتم آنیل شبیه سازی شده
مرز کارای محدودیت اصلی

چکیده:

مارکویتز با معرفی مدل میانگین – واریانس گام بزرگی برای حل مسائل بهینه سازی پورتفولیو برداشت. اما این مدل براساس فرضیاتی بنا نهاده شده است که در عمل به ندرت برقرار است. بنابراین تلاش های زیادی به صورت تئوری و عملی در زمینه بهبود مدل استاندارد میانگین – واریانس مارکویتز انجام گرفته است. معیارهای ریسک متعددی از قبیل مدل نیمه واریانس، مدل میانگینِ قدر مطلق انحراف و مدل واریانس با چولگی پیشنهاد شده است. یکی از معروفترین معیارهای ریسک مدل نیمه واریانس می باشد. در این مقاله با استفاده از الگوریتم های آنیل شبیه سازی شده و جستجوی ممنوع مدل نیمه واریانس را بهینه می کنیم. محدودیت مربوط به تعداد سهام پورتفولیو و نسبت پورتفولیو در هر سهم را در مدل درنظر می گیریم. مرز کارای محدودیت اصلی را ترسیم کرده و توانایی دو الگوریتم در رسم این منحنی با استفاده از آزمون آماری t زوجی مورد بررسی قرار می گیرند. اطلاعات مربوط به ارزش تاریخی سهام DAX، Hang Seng و S&P100 در فاصله سال های ۲۰۰۷ تا ۲۰۰۹ به عنوان ورودی های مدل در نظر گرفته می شوند.

۱. مقدمه

مسئله انتخاب پورتفولیو به چگونگی توزیع ثروت میان سهام مختلف می پردازد. مسائل بهینه سازی پورتفولیو یکی از زمینه های اصلی تحقیقاتی در مدیریت ریسک مدرن می باشد. در حالت کلی یک سرمایه گذار ترجیح می دهد که بازده پورتفولیو تا جایی که امکان دارد افزایش یابد اما وی همزمان خواهان کاهش ریسک نیز است. با این وجود بازده بیشتر همواره متضمن ریسک بیشتری می باشد. در حقیقت بازده و ریسک مهمترین معیار در مسائل بهینه سازی پورتفولیو هستند.

مارکویتز [۱و۲] با معرفی مدل میانگین – واریانس[2] (در قسمت ۳ مقاله به معرفی این مدل خواهیم پرداخت) گام بزرگی برای حل مسائل بهینه سازی پورتفولیو برداشت. علی رغم محبوبیت مدل میانگین – واریانس مارکویتز، این مدل در عمل دارای محدودیت ها و نقاط ضعفی به شرح زیر می باشد: (۱) برقرار نبودن فرضیات زیر بنایی مدل مارکویتز و ناکارآمدی این مدل در اندازه گیری ریسک در بسیاری از موارد (۲) در نظر نگرفتن محدودیت های سرمایه گذاری دردنیای واقعی (۳) مشکلات محاسباتی در اجرا مدل.

در مورد نخستین نقطه ضعف این مدل، می توان گفت که مدل میانگین – واریانس استاندارد براساس این فرض قرار گرفته است که سرمایه گذاران ریسک گریزند[3] و بازده سهام دارای توزیع نرمال است[۳]. جیا و دیر[۴] و میلز [۵]اشاره می کنند که این شرایط درعمل به ندرت برقراراست. تابع هدف میانگین – واریانس ممکن است بهترین معیار برای اندازه گیری ریسک نباشد و معیارهای دیگرریسک ممکن است مناسب تر باشند [۳و۶]. بنابراین تلاش های زیادی به صورت تئوری و عملی در زمینه بهبود مدل استاندارد میانگین – واریانس مارکویتز انجام گرفته است. معیارهای ریسک متعددی از قبیل مدل نیمه واریانس[4]،

تاریخ وصول: ۸۹/۷/۲۰
تاریخ تصویب: ۹۰/۸/۷

***نویسنده مسئول مقاله: دکتر یحیی زارع مهرجردی**، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه یزد، Yazm2000@yahoo.com
حسن رسایی، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه یزد، Hasan.Rasay@gmail.com

[2] *Mean – variance model*

[3] *Risk averse*
[4] *Semi - variance*

مدل میانگینِ قدر مطلق انحراف[۱] و مدل واریانس با چولگی[۲] پیشنهاد شده است.

در خصوص دومین ایراد وارد شده به مدل میانگین – واریانس مارکویتز، می توان گفت محققان زیادی به این مطلب اشاره کرده اند که این مدل بسیاری از محدودیت ها و اولویت های سرمایه گذاری در دنیای واقعی را در نظر نمی گیرد و این در حالیست که سرمایه گذاران درجهان واقعی ممکن است با محدودیت های زیادی در مدل های ریسک مواجه باشند[۳و۶،۷].

چند نمونه از مهمترین محدودیت ها در مسائل بهینه سازی پورتفولیو عبارتند از: (i) محدودیت مربوط به تعداد سهام سرمایه گذاری شده در پورتفولیو (از چنین محدودیتی در ادبیات پورتفولیو غالباً تحت عنوان محدودیت اصلی[۳] یاد می شود) (ii) محدودیت مربوط به نسبتی از پورتفولیو که دریک سهم معین سرمایه گذاری می شود. (iii) محدودیت دسته بندی[۴]. با فرض اینکه تمام سهام در دسترس را می توان به چند دسته تقسیم بندی کرد (از قبیل سهام مربوط به صنعت نفت، سهام مربوط به حمل و نقل و...) این محدودیت نسبتی از پورتفولیو را که در یک دسته خاص از سهام سرمایه گذاری می شود محدود می کند. (IV) محدودیت مربوط به حداقل انباشته معامله شده[۵] و لیکویدیتی[۶].

اولی تعداد سهام معامله شده در پورتفولیو را برای یک سهم خاص محدود می کند و لیکویدیتی به صورت قابلیت تبدیل شدن ارزش یک سهم به پول نقد بدون اینکه مبلغی زیادی از ارزش آن کسر گردد، تعریف می شود[۸].

در مورد مشکلات محاسباتی مدل میانگین – واریانس مارکویتز (سومین نقطه ضعف وارده شده به این مدل) می توان گفت که به طور کلی مدل مارکویتز چه در حالت استاندار و چه در هنگامی که محدودیت های سرمایه گذاری را در مدل در نظر می گیریم می توان به دو شیوه حل شود. (۱) با استفاده از تکنیک های بهینه سازی ریاضی و یا بسته های نرم افزارهای در دسترس (۲) استفاده از تکنیک های فرا ابتکاری. مدل استاندار میانگین - واریانس مارکویتز یک مدل درجه دوم[۷] است که الگوریتم های کارایی برای حل این نوع از مسائل بهینه سازی وجود دارد[۶] همچنین بسیاری از بسته های نرم افزاری نیز توانایی حل این نوع از مسائل تحقیق در عملیات را دارا هستند. در هر صورت آنچه مسلم است این است که اولاً اکثر نرم افزارها براساس تکنیک های بهینه سازی ریاضی طراحی شده اند و ثانیاً استفاده از نرم افزار با بزرگتر شدن ابعاد مسئله اجتناب ناپذیر است. اما با وارد شدن برخی از محدودیت ها ذکر شده در فوق (از قبیل محدودیت اصلی)، به مدل استاندار مارکویتز، این مدل به یک مدل پیچیده برنامه ریزی غیر خطی مختلط عدد صحیح[۸] تبدیل می شوند. بینوستک به ارائه یک سری تکنیک های ریاضی برای این نوع مسئله انتخاب پورتفولیو پرداخته است [۹].

جابست و همکاران از الگوریتم انشعاب و برش برای حل مسئله انتخاب پورتفولیو با در نظر گرفتن محدودیت اصلی استفاده کرده اند[۱۰]. مزیت استفاده از تکنیک های ریاضی در حل این نوع مسائل، رسیدن به جواب بهینه کلی است (به شرطی که الگوریتم مورد استفاده یکی از شرایط اختتامیه را براورده کند) از طرفی، زمان محاسبات غیر قابل پیش بینی و پیچیدگی مسئله با وارد شدن محدودیت ها و یا تغییر تابع هدف افزایش می یابد[۱۱]. علاوه بر تکنیک های ریاضی، نرم افزار های Lingo و برخی سولور های[۹] در نرم افزار Gams قابلیت حل این دسته از مسائل را دارا هستند.

در نرم افزار Lingo با استفاده از قابلیت Global Solver بهینگی کلی جواب تضمین می شود اما با بزرگتر شدن ابعاد مسئله ممکن ساعت ها صرف انجام محاسبات شود[۱۲]. سولور Dicopt در نرم افزار Gams توانایی حل مسائل برنامه ریزی غیر خطی مختلط عدد صحیح را دارا می باشد اما بهینگی کلی جواب را تضمین نمی کند.

بنابراین با توجه به مطالب عنوان شده و با در نظر گرفتن بزرگی و پیچیدگی ابعاد مسئله انتخاب پورتفولیو در دنیایی واقعی، به نظر می رسد استفاده از تکنیک های فرا ابتکاری در حل این نوع مسئله اجتناب ناپذیر است و نویسندگان زیادی به لزوم استفاده از تکنیک های فرا ابتکاری برای حل این نوع مسئله تاکید کرده اند که در مرور ادبیات موضوع به تفصیل به آن خواهیم پرداخت. ادامه مقاله به این صورت می باشد:

در بخش ۲ مقاله به مرور ادبیات مسئله انتخاب و بهینه سازی پورتفولیو خواهیم پرداخت و دربخش ۳ مدل میانگین – واریانس و مفهوم مرز کارا را معرفی خواهیم کرد. بخش ۴ به ارائه مدل نیمه واریانس اختصاص یافته است. بخش ۵ شامل توضیح الگوریتم های فراابتکاری آنیل شبیه سازی شده و جستجوی ممنوع می باشد. در بخش ۶ چگونگی مقایسه آماری الگوریتم ها تشریح شده است. در بخش۷ نتایج تحقیق گزارش شده و سرانجام بخش ۸ به نتیجه گیری می پردازیم.

[1] *Mean absolute deviation model*
[2] *Variance with skewness*
[3] *Cardinal constriant*
[4] *Class constraint*
[5] *Minimum transaction lot*
[6] *Liquidity*
[7] *Quadratic*
[8] *Mixed integer nonlinear programming*
[9] *Solver*

۲. مرور ادبیات

در قسمت قبل، مبانی در مورد مسئله انتخاب پورتفولیو ارائه شد و مدل میانگین - واریانس مارکویتز و مشکلات این مدل مورد بررسی قرار گرفت. در این قسمت با در نظر گرفتن آنچه که در مورد نقاط ضعف مدل مارکویتز عنوان شد، به مرور ادبیات مسئله انتخاب پروتفولیو خواهیم پرداخت.

شاید نخستین استفاده از تکنیک های فراابتکاری برای حل مسئله بهینه سازی پورتفولیو را بتوان کار چانگ و همکاران دانست[۶]. آنها در این مقاله با استفاده از الگوریتم ژنتیک، آنیل شبیه سازی شده و روش جستجوی ممنوع، مسئله انتخاب پورتفولیو را بهینه سازی کرده و محدودیت ها اصلی و محدودیت مربوط به نسبت سرمایه گذاری شده در هر سهم را در مدل نظر گرفته اند. آنها نشان داده اند، در حالت کلی هیچکدام از این تکنیک ها برتری نسبت به دیگری از لحاظ رسیدن به جواب بهینه ندارند و در نهایت استفاده از هر سه این روش ها را برای مسئله بهینه سازی پورتفولیو پیشنهاد داده اند. معیار ریسک مورد نظر در این مقاله معیار میانگین – واریانس بوده است. در کار دیگر، چانگ و همکاران مسئله انتخاب پورتفولیو، تحت معیار های ریسک میانگین – واریانس، نیمه واریانس ، واریانس با چولگی و میانگین قدر مطلق انحراف را با استفاده از الگوریتم ژنتیک بهینه سازی کرده اند و در هر مورد مرز کارا را برای داد های جمع آوری شده از بازارهای سهام مختلف ترسیم کرده و نشان داده اند که این الگوریتم می تواند به خوبی مسئله انتخاب پورتفولیو تحت معیار های ریسک مختلف را بهینه سازی کند[۳]. یانگ و همکاران به مسئله انتخاب پورتفولیو و سرمایه گذاری در سهام نظامی پرداخته اند. آنها از معیار ریسک نیمه واریانس استفاده کرده و محدودیت اصلی را در انتخاب پورتفولیو در نظر گرفته اند. در این مقاله از الگوریتم های ژنتیک و جستجوی ممنوع برای بهینه سازی مدل نیمه واریانس استفاده شده است[۱۳]. سولیمانی و همکاران با در نظر گرفتن مدل میانگین – واریانس مارکویتز سه نوع محدودیت را در این مدل در نظر گرفته اند که شامل محدودیت اصلی، محدودیت دسته بندی و محدودیت مربوط به حداقل انباشته معامله شده است. آنها برای حل این نوع مسئله، الگوریتم ژنتیک را پیشنهاد داده اند و برای تنظیم پارامترهای این الگوریتم و مقایسه کارایی الگوریتم پیشنهادی از نرم افزار Lingo استفاده کرده اند[۱۲].

تان چون کورا از الگوریتم پرندگان[1] برای حل مسئله انتخاب پورتفولیو استفاده کرده است. معیار ریسک وی میانگین - واریانس بوده و محدودیت ها اصلی و محدودیت مربوط به نسبت سرمایه گذاری شده در هر سهم را در این نوع مسئله در نظر گرفته است. همچنین توانایی الگوریتم پرندگان، در رسیدن به جواب بهینه با الگوریتم های آنیل شبیه سازی شده، ژنتیک و روش جستجوی ممنوع مقایسه شده و در نهایت نتیجه گرفته شده است که هیچکدام از این تکنیک ها برتری نسبت به دیگری از لحاظ دستیابی به جواب بهینه ندارند[۱۴]. فرناندز و گومز از شبکه های عصبی هاپفیلد برای بهینه سازی مسئله انتخاب پورتفولیو استفاده کرده اند. قابلیت شبکه های عصبی برای حل این نوع مسئله با تکنیک های ژنتیک، آنیل شبیه سازی شده و روش جستجوی ممنوع مقایسه شده و نتیجه گرفته شده است که هیچکدام از این تکنیک ها در حالت کلی برتری نسبت به دیگری ندارند.

آنها همچنین از داده های جمع آوری شده از بازار های سهام مختلف برای مقایسه عملکرد این تکنیک ها استفاده کرده اند[۱۵]. کراما و سچین به ارائه الگوریتم آنیل شبیه سازی شده برای مسئله انتخاب پورتفولیو پرداخته اند. محدودیت ها مختلفی در این مسئله در نظر گرفته شده و بیان می شود که رویکرد پیشنهادی در صورت استفاده از توابع هدف مختلف برای ریسک، باز هم قابل استفاده است. معیار ریسک در نظر گرفته شده در مدل آنها معیار ریسک میانگین – واریانس است و مسئله بهینه سازی مورد نظر یک مسئله برنامه ریزی درجه دوم مختلط عدد صحیح بوده است[۱۶]. برنک و همکاران مسئله بهینه سازی پورتفولیو تحت معیار ریسک میانگین - واریانس را با استفاده از الگوریتم تکاملی چند هدفه حل کرده اند. آنها محدودیت ها مختلفی را در مدل در نظر گرفته اند به طوریکه مدل انتخاب پورتفولیو حاصله، تبدیل به یک مدل برنامه ریزی غیر خطی و غیر محدب[2] شده است[۱۱].

آناگنوتوپولوس و مامانیس در مسئله انتخاب پورتفولیو، علاوه بر در نظر گرفتن معیار های ریسک و بازده، حداقل کردن تعداد سهام موجود در پورتفولیو را به عنوان یک معیار سوم در نظر گرفته اند. آنها همچنین محدودیت اصلی و محدودیت دسته بندی را در مدل دخیل کرده اند. مسئله بهینه سازی حاصله یک مسئله سه هدفه غیر خطی مختلط عدد صحیح می باشد و برای حل این مسئله، سه نوع تکنیک بهینه سازی تکاملی چند هدفه[3] پیشنهاد شده است. معیار ریسک مورد نظر آنها همچنان معیار ریسک میانگین - و اریانس بوده است[۷].

با بررسی های بیشتری که نویسندگان این مقاله انجام داده اند به این نتیجه می رسیم که اولاً علی رغم محبوبیت مدل نیمه واریانس به عنوان جایگزینی برای مدل میانگین – واریانس

[1] *Particle sworm optimization*

[2] *Nonconvex*

[3] *Multiobjective evolutionary algorithm*

مارکویتز، تحقیقات کمی در مورد بررسی و بهینه سازی این مدل انجام شده است و در اکثر موارد نویسندگان و محققان به استفاده از تکنیک های فراابتکاری در مدل میانگین - واریانس پرداخته اند. دوماً در مواردیکه چند تکنیک فرا ابتکاری برای مسئله انتخاب پورتفولیو استفاده شده است معیار مقایسه توانایی این تکنیک ها در رسیدن به جواب بهینه، عمدتاً تکنیک های ریاضی بوده است که خواننده علاقه مند به جزیئات این تکنیک ها را به [۶و۱۴] ارجاع می دهیم.

در این مقاله ضمن مدل سازی مسئله بهینه سازی پورتفولیو تحت معیار ریسک نیمه واریانس، محدودیت های (i) و (ii) (محدودیت اصلی و محدودیت مربوط به نسبتی از پورتفولیو که در یک سهم سرمایه گذاری می شود) را در مدل مزبور در نظر می گیریم. با ورود محدودیت های (i) و(ii) به مسئله، به یک مدل برنامه ریزی مختلط عدد صحیح غیر خطی می رسیم. با توجه به مطالب عنوان شده در فوق، تکنیک های فراابتکاری در حل این نوع مسائل نقش موثری می توانند ایفا کنند. دو تکنیک فراابتکاری شامل روش جستجوی ممنوع و آنیل شبیه سازی شده برای حل مسئله بهینه سازی پورتفولیو تحت معیار ریسک نیمه واریانس، به کار گرفته شده و توانایی آنها در حل مدل نیمه واریانس و یافتن مرز کارا با استفاده از آزمون آماری t مورد مقایسه قرار گرفته است.

تا آنجایی که نویسندگان این مقاله اطلاع دارند این نخستین مقاله ای است که در آن از الگوریتم آنیل شبیه سازی شده برای بهینه سازی پورتفولیو تحت معیار ریسک نیمه واریانس استفاده می شود. همچنین در این مقاله روشی نوین برای مقایسه عملکرد الگوریتم های فراابتکاری با استفاده از آزمون آماری t زوجی[1] پیشنهاد داده ایم.

۳. مدل میانگین – واریانس مارکویتز و مرز کارا

مارکویتز نخستین کسی است که واریانس و یا انحراف معیار را به عنوان معیار ریسک معرفی کرد. فرض کنید:

N تعدا سهام دردسترس؛

w_i نسبتی از پورتفولیو باشد که در سهم iام $(i = 1, \ldots, N)$ سرمایه گذاری می شود: $(0 \leq w_i \leq 1)$؛

μ_i بازده سهم iام $(i = 1, \ldots, N)$ در پورتفولیو؛

σ_{ij} کواریانس بین سهم i و jام$(i = 1, \ldots, N)$ و $(j = 1, \ldots, N)$ باشند.

مسئله بهینه سازی پورتفولیو با استفاده از مدل میانگین – واریانس مارکویتز رامی توان توسط روابط (۱) تا (۴) بیان کرد.

$$\text{Minimize} \quad \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij} \tag{۱}$$

$$\text{Subject to} \quad \sum_{i=1}^{N} w_i \mu_i = R^* \tag{۲}$$

$$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \tag{۳}$$

$$0 \leq w_i \leq 1, \qquad i = 1,\ldots,N \tag{۴}$$

رابطه (۱) واریانس (ریسک) کل پورتفولیو را مینیمم می کند. رابطه (۲) بیان می کند که بازده پورتفولیو برابر با R* می باشد. رابطه (۳) تضمین می کند که مجموع نسبت هایی از پورتفولیو که در سهام مختلف سرمایه گذاری می شود باید برابر با یک شود و سرانجام رابطه (۴) بیان می کند که هر کدام از این نسبت ها باید بین یک و صفر باشد. توجه داشته باشید که محدودیت های (۳) و (۴) کاملاً بدیهی می باشند و درواقع مسئله فوق را می توان یک مسئله بهینه سازی پورتفولیو بدون محدودیت دانست[۶]. مدل فوق یک مسئله برنامه ریزی درجه دوم است و امرزوه با استفاده از نرم افزارهای در دسترس می توان جواب بهینه آنرا محاسبه کرد.

با حل مدل فوق به ازاء یک R* معین به ریسک بهینه در آن سطح R* خواهیم رسید. اگر این کار را برای R* های مختلف تکرار کنیم و نقاط R* و ریسک بهینه متناظر با آن را بر روی یک محور مختصات ترسیم کنیم به منحنی دست خواهیم یافت که مرز کارا[2] خوانده می شود.

از آنجا که مسئله بهینه سازی پورتفولیوی فوق یک مسئله بدون محدودیت است به این مرز کارا، مرز کارای بدون محدودیت[3] (UEF) گفته می شود.

با معرفی پارامتر وزن λ، $(0 \leq \lambda \leq 1)$ می توان مدل فوق را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\text{Minimize} \quad \lambda\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij}\right] - (1-\lambda)\left[\sum_{i=1}^{N} w_i \mu_i\right] \tag{۵}$$

$$\text{Subject to} \quad \sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \tag{۶}$$

$$0 \leq w_i \leq 1, \qquad i = 1,\ldots,N \tag{۷}$$

برای هر مقدار مشخص λ مدل فوق به بیشترین بازده، توام با کمترین ریسک، در آن سطح λ دست پیدا می کند. در حالتیکه

[1] t paired

[2] Efficient frontier

[3] Unconstrianed efficient frontier

λ یک باشد مدل فوق ریسک را (صرف نظر از بازده پورتفولیو) مینیمم می کند. این نقطه متناظر با نقطه ابتدای مرز کارا است و اگر λ برابر با صفر باشد مدل فوق بازده پورتفولیو را (صرف نظر از ریسک) ماکسیمم می کند. این نقطه متناظر با نقطه انتهای مرز کارا است و در آن یک سهم با بیشترین بازدهی انتخاب می شود. با ترسیم نقاط ریسک و بازده حاصل از مدل فوق برای مقادیر مختلف λ، به همان منحنی کارای حاصل از روابط (۱) تا (۴) (UEF) دست خواهیم یافت.

۴. مدل نیمه واریانس

یکی از متداولترین معیارهای جایگزین ریسک، در مدل استاندارد مارکویتز، که نخستین بار توسط خود مارکویتز پیشنهاد شد، معیار نیمه واریانس است[۱۷]. در مواردیکه توزیع بازده سهام نامتقارن[1] است مدل میانگین – واریانس رفتار پورتفولیو را به طرز نامطلوبی پیش بینی می کند و در اندازه گیری ریسک ناکارآمد است در حالیکه مدل نیمه واریانس به خوبی ریسک را اندازه گیری می کند[۱۳و۳]. تحقیقات انجام شده نشان می دهد که افراد به استفاده از معیار ریسک نیمه واریانس بسیار علاقه مند هستند[۱۸]. کوبینه و برانتینگ [۱۹]،کاپلان وآلدرج [۲۰]و هونگ [۲۱] ویژگی ها و مشکلات محاسباتی مدل نیمه واریانس را بررسی کرده اند. این تحقیقات نشان می دهد که مدل نیمه واریانس به خوبی می تواند ریسک را اندازه گیری کند.

نیمه واریانس یک معیار ریسک نامطلوب[2] می باشد. در معیارهای ریسک نامطلوب فقط بازده های کمتر از یک حد مشخص را در محاسبه ریسک در نظر می گیریم.

در مدل میانگین – واریانس، انحرافات کوچکتر و بزرگتر از میانگین، در محاسبه ریسک، به طور یکسان در نظر گرفته می شوند و در این شرایط، واریانس، معیار ریسک متقارن می باشد. سرمایه گذاران در دنیای واقعی، انحرافات کوچکتر از میانگین را نامطلوب در حالیکه انحرافات بزرگتر از میانگین را مطلوب می دانند. مدل نیمه واریانس با توجه به این نکته در محاسبه ریسک فقط انحرافات کوچکتر از میانگین را مد نظر قرار می دهد و انحرافات بزرگتر از میانگین در محاسبه ریسک منظور نمی شوند. بنابراین در مدل نیمه واریانس، دوره های زمانی که بازده پورتفولیو بیشتر از میانگین بازده باشد را در محاسبه ریسک در نظر نمی گیریم و فقط دوره هایی که بازده پورتفولیو کمتر از میانگین بازده است را در محاسبه ریسک وارد می کنیم. فرض کنید:

T تعداد دوره های زمانی(پریودهایی) باشد (از ۰ تا T) که ما ارزش تاریخی سهام را مشاهده می کنیم؛

v_{it} ارزش سهم iام $(i=1,\dots,N)$ در دوره زمانی tام $(t=0,\dots,T)$؛

$z_i=1$ اگر سهم iام $(i=1,\dots,N)$ در پورتفولیو باشد و در غیر این صورت صفر می باشد؛

K تعداد سهامی باشد که خواهان سرمایه گذاری در آنها هستیم؛

ε_i حداقل نسبتی از پورتفولیو می باشد که باید در سهم iام $(i=1,\dots,N)$ سرمایه گذاری شود ، اگر از این سهم در پورتفولیو باشد$(z_i=1)$؛

δ_i حداکثر نسبتی از پورتفولیو می باشد که باید در سهم iام $(i=1,\dots,N)$ سرمایه گذاری شود، اگر از این سهم در پورتفولیو باشد $(z_i=1)$؛

r_t بازده پورتفولیو در دوره زمانی tام $(t=1,\dots,T)$؛

و $\bar{r}$ میانگین بازده پورتفولیو در Tدوره زمانی باشد.

در این صورت مدل نیمه واریانس را می توان توسط روابط (۸) تا (۱۵) بیان کرد.

$$Minimize \quad \lambda\left[\sum_{t=1;r_t<\bar{r}}^{T}(r_t-\bar{r})^2/T\right]-(1-\lambda)\bar{r} \qquad (۸)$$

$$Subject\ to \quad \sum_{i=1}^{N} w_i=1 \qquad (۹)$$

$$\sum_{i=1}^{N} z_i=K \qquad (۱۰)$$

$$\varepsilon_i z_i \le w_i \le \delta_i z_i\ , \qquad i=1,\dots,N \qquad (۱۱)$$

$$r_t=\log_e\left[\left(\sum_{t=1}^{T} w_i v_{it}/v_{iT}\right)\Big/\left(\sum_{t=1}^{T} w_i v_{it-1}/v_{iT}\right)\right], \qquad t=1,\dots,T \qquad (۱۲)$$

$$\bar{r}=\sum_{t=1}^{T} r_t/T\ , \qquad (۱۳)$$

$$w_i \ge 0\ , \qquad i=1,\dots,N \qquad (۱۴)$$

$$z_i \in \{0,1\}\ , \qquad i=1,\dots,N \qquad (۱۵)$$

رابطه (۸) از دو قسمت تشکیل شده است. بخش اول آن مربوط به ریسک پورتفولیو می باشد. توجه داشته باشید که ریسک دیگر متقارن نیست و دوره های زمانی که $r_t \ge \bar{r}$ (دوره های زمانی که بازده پورتفولیو بیشتر از میانگین است) را در محاسبه ریسک

[1] Asymmetric
[2] Downside risk

در نظر نمی گیریم. رابطه (۹) همان رابطه (۶) است. رابطه (۱۰) تضمین می کند که تعداد سهام سرمایه گذاری شده در پورتفولیو باید برابر با K باشد. همانطور که قبلاً اشاره شد این محدودیت به محدودیت اصلی در ادبیات بهینه سازی پورتفولیو مشهور است. رابطه (۱۱) بیان می کند که اگر سهم iام در پورتفولیو باشد ($z_i = 1$) نسبتی از پورتفولیو که در این سهم سرمایه گذاری می شود، w_i، باید حداقل ε_i و حداکثر δ_i باشد و اگر این سهم در پورتفولیو نباشد ($z_i = 0$) نسبتش در پورتفولیو صفر است. رابطه (۱۲) بازده پورتفولیو را در دوره های زمانی مورد بررسی و رابطه (۱۳) میانگین بازده پورتفولیو را در T دوره زمانی محاسبه می کند . رابطه (۱۴) یک محدودیت کلی است و سرانجام رابطه(۱۵) z_i را به صورت متغیر های صفر و یک تعریف می کند. همانند مدل میانگین – واریانس در این مدل نیز با تغییر پارامتر λ در فاصله صفر و یک به مرز کارا دست خواهیم یافت. از آنجا که این مرز کارا برای مدل نیمه واریانس ترسیم می شود و همچنین با توجه به وجود محدودیت اصلی (رابطه۱۰) در مدل به این مرز کارا، مرز کارای محدودیت اصلی (CCEF[1]) تحت معیار ریسک نیمه واریانس گفته می شود. توجه داشته باشید که مدل فوق یک مسئله برنامه ریزی غیر خطی مختلط عدد صحیح است که حل کردن آن با استفاده از تکنیک های ریاضی به خصوص برای مسائل با مقیاس بزرگ بسیار مشکل و وقتگیر است. در نتیجه تکنیک های فراابتکاری برای حل این نوع از مسائل می توانند نقش موثری را ایفا کنند. در ادامه مقاله راجع به استفاده و مقایسه الگوریتم جستجوی ممنوع و آنیل شبیه سازی شده برای یافتن مرز کارای محدودیت اصلی تحت معیار ریسک نیمه واریانس بحث خواهیم کرد.

۵. الگوریتم های فراابتکاری

۵-۱. چگونگی رمز گذاری جواب ها

الگوریتم های جستجوی ممنوع و آنیل شبیه سازی شده ای که در این مقاله به کار گرفته شده اند از جواب هایی که به صورت زیر رمز گذاری می شوند استفاده می کنند. هر جواب را می توان یک بردار سطری با $2K$درایه در نظر گرفت که از دو قسمت تشکیل شده است. برای پر کرد قسمت اول جواب (Kدرایه اول) از میان N سهم K سهم را به طور تصادفی انتخاب می کنیم (این مجموعه Kسهم را با Q نمایش می دهیم) و برای پر کردن Kدرایه دوم ماتریس، K عدد به طور تصادفی در فاصله صفر و یک تولید می کنیم. هر کدام از این اعداد تصادفی تولید شده که با s_i نمایش می دهیم با درایه ای در قسمت اول جواب متناظر است. به این صورت که عدد تصادفی که در درایه j ام $(K+1 \leq j \leq 2K)$ قرار می گیرد متناظر با سهمی است که در درایه $j-k$ قرار گرفته است. از آنجا که هر ε_i حداقل نسبتی از پورتفولیو است که باید در سهم iام سرمایه گذاری شود لذا $1-\sum_{j \in Q} \varepsilon_j$ نسبتی از پورتفولیو را نشان می دهد که برای سرمایه گذاری آزاد است وآنرا نسبت پورتفولیوی آزاد[2] می نامیم[۳]. هر s_i مرتبط با درصدی از نسبت پورتفولیوی آزاد است که می تواند به سهم iام اختصاص یابد. با توجه به بحث ارائه شده، w_i (نسبتی از پورتفولیو که به سهم iام اختصاص داده می شود) را می توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$w_i = \varepsilon_i + \left(s_i \Big/ \sum_{j \in Q} s_j \right) \left(1 - \sum_{j \in Q} \varepsilon_j \right)$$

در واقع w_i برابر حداقل نسبت سهم iام به اضافه درصد مشخصی از نسبت پورتفولیوی آزاد است. تمام جواب های تولید شده به شیوهٔ فوق، لزوماً جواب های شدنی برای مدل نیمه واریانس نیست زیرا در رابطه (۱۱) اگرچه محدودیت مربوط به حد پایینی همواره برقرار است اما محدودیت مربوط به حد بالایی ممکن است برقرار نباشد. در الگوریتم های آنیل شبیه سازی شده و جستجوی ممنوع شرح داده شده تمام جواب های اولیه ای که در مرحله اول ایجاد می شوند در مرحله بعد به جواب های شدنی تبدیل می شوند. بنابراین به یک فرایند تکراری نیاز داریم که تضمین کند محدودیت مربوط حد بالایی هر سهم (δ_i) ارضا خواهد شد.

با ارائه یک مثال چگونگی رمز گذاری جواب ها را روشن می کنیم. فرض کنید مسئله انتخاب پورتفولیو به صورت N=۱۰، K = ۲، ε_i =۰/۰۱۰ و δ_i=۱ باشد. یک راه حل برای این مسئله می توان به صورت Q={۳و۷} {s ۳= ۰/۹و ، s ۷ = ۰/۵} باشد. این راه حل به این مفهوم است که سهام ۳ و ۷ در پورتفولیو قرار می گیرند و نسبت پورتوفلیو آزاد برابر با ۰/۸ = $1-\sum_{j \in Q} \varepsilon_j$ است زیرا می دانیم که هر کدام از سهام حداقل باید داری نسبت ۰/۱ در پورتفولیو باشند.

بنابراین راه حل {s ۳= ۰/۹و ، s ۷ = ۰/۵}را می توان به این صورت تفسیر کرد که نسبتی از پورتفولیوی آزاد که به سهم ۳ اختصاص می یابد برابر با S۳/(S۳+S۷) = ۰/۶۴۲۹ و بنابراین نسبتی از پورتفولیو که به سهم ۳ اختصاص می یابد برابر است با ۰/۶۱۴۳= W۳= ۰/۱ +۰/۶۴۲۹×۰/۸ و به همین شیوه نسبتی از پورتفولیو که به سهم ۷ اختصاص می یابد برابر با۰/۳۸۵۷ = S۷ /(S۳ +S۷) × ۰/۸+ ۰/۱= W۷ است.

[1] Cardinality constrained efficient frontier

[2] Free portfolio proportion

۲-۵. الگوریتم جستجوی ممنوع[1]

جستجوی ممنوع یک روش جستجوی محلی[2] است که نظریه پردازی راجع به آن نخستین بار توسط گلور[۲۲] و سپس هنسن [۲۳] ارائه شد. مفهوم اساسی در جستجوی ممنوع حرکت از یک نقطه شروع اولیه به سمت جواب هایی در همسایگی آن است. توجه داشته باشید که این جوابها ممکن است شدنی و یا نشدنی باشند. از میان این همسایه ها بهترین جواب به عنوان نقطه شروع تکرار بعدی انتخاب می شود و این فرایند به تعداد تکرار مشخص ادامه می یابد. برای الگوریتم جستجوی ممنوع ابتدا ۱۰۰۰ جواب اولیه تصادفی ایجاد می کنیم. همانطور که قبلاً اشاره شد در این مقاله تمام این جوابها در مرحله بعدی الگوریتم به جواب های شدنی تبدیل می شوند. از میان جواب های تولید شده فوق، بهترین جواب به عنوان نقطه شروع اولیه انتخاب می شود. هر کدام از K سهم موجود در این بهترین جواب، انتخاب شده و مقدار$(\varepsilon_i + s_i)$ متناظر با آن سهم را در ۱٫۱و ۰٫۹ ضرب می شود. به این ترتیب ۲K جواب در همسایگی جواب فعلی را ارزیابی می کنیم. برای جلوگیری از دور[3](تسلسل) لیستی از حرکت های ممنوعه[4] به کار برده می شود. این لیست، حرکت های مشخصی که منجر به رسیدن به جوابی شود که قبلاً با آن مواجه شده ایم را ممنوع می کند. لیست حرکت های ممنوعه با پیشروی الگوریتم به روز می شوند به طوریکه حرکتی که درتکرار فعلی به لیست ممنوعه اضافه شده است بعد از تعدادی تکرار مشخص از لیست خارج می شود. اگر یک حرکت ممنوعه منجر به یک جواب شدنی بهبود یافته شود (معیار رضایت[5]) در ممنوع بودن آن تجدید نظر می کنیم. بنابراین لیست ممنوعه در مسئله مورد بحث ما، ماتریسی با ۲N عدد صحیح است که نشان میدهد برای هر کدام از سهام یک حرکت مشخص در حال حاضر ممنوع است یا نه. تعداد تکرارها ۵۰۰N/K در نظر گرفته شده است. یعنی الگوریتم ۱۰۰۰N راه حل را برای هر مقدار λ ارزیابی می کند.

مراحل اصلی الگوریتم جستجوی ممنوع را می توان به صورت زیر نمایش داد.

```
Initiate the tabu status
Repeat
   Search a set of neighbor solutions of the current solution
   Evaluate function values of these solutions
   Apply aspiration criterion
   Choose the best one among non-tabu solutions
   Replace the current solution by the best one
   Update tabu status
Until a termination criterion has been met
```

[1] *Tabu search*
[2] *Local search hueristic*
[3] *Cycling*
[4] *Tabu moves*
[5] *Aspiration criteria*

۳-۵. آنیل شبیه سازی شده[6]

آنیل شبیه سازی شده از الگوریتمی برای شبیه سازی فرایند سرد شدن مواد در حمام گرما[7] الهام گرفته شده [۲۴] اما استفاده از آن برای مسائل بهینه سازی نخستین بار توسط کیرکاپتریک و همکاران[۲۵] وکرنی [۲۶]انجام شده است. هر دو الگوریتم آنیل شبیه سازی شده و جستجوی ممنوع حرکات بالقوه از یک نقطه شروع اولیه را بررسی می کنند. در آنیل شبیه سازی شده جهت هایی که منجر به جواب بدتر می شود نیز با یک احتمال مشخص پذیرفته می شود. این احتمال در طول اجرای الگوریتم کاهش یافته و با آنچه که دما خوانده می شود در ارتباط است. به عبارت دقیق تر اگر دمای فعلی را T در نظر بگیریم، حرکتی که تابع هدف را به میزان Δ کاهش می دهد با احتمال $e^{-\Delta/T}$ پذیرفته می شود. هر چقدر دمای فعلی (T) بالاتر باشد احتمال پذیرفتن جوابی که تابع هدف را بدتر می کند بیشتر است بنابراین این احتمال با کاهش دما کاهش می یابد.

در آنیل شبیه سازی شده دما براساس یک الگوی مشخص که دمای اولیه و نرخ کاهش دما را مشخص می کند، کاهش می یابد. یک الگوی ساده برای کاهش دما می تواند با ضرب α $(0 < \alpha < 1)$ در دمای فعلی T به صورت $T=\alpha T$ مشخص گردد[۶].

همانند روش جستجوی ممنوع در اینجا نیز ۱۰۰۰ جواب اولیه به طور تصادفی تولید می شود. دمای اولیه با توجه به مقدار تابع هدف درنقطه شروع اولیه حرکت، تعیین شده و مقدارα برابر با ۰٫۹۵ در نظر گرفته می شود و در هر دمای مشخصی ۲N مرتبه تکرار انجام می گیرد. لازم به ذکر است که تنظیم پارامترهای هر دو الگوریتم عمدتاً با پیروی از پیشنهادات نویسندگان مختلف[۱۳و۶ ،۳] و مشاهده دقیق خروجی الگوریتم ها در نرم افزار Matlab 9 انجام گرفته است.

۶. مقایسه آماری عملکرد الگوریتم جستجوی ممنوع و آنیل شبیه سازی شده

اگر بخواهیم عملکرد الگوریتم های فراابتکاری را برای یافتن مرز کارای محدودیت اصلی در مدل میانگین – واریانس مورد بررسی قرار دهیم، می توانیم مرز کارای بدون محدودیت را معیار سنجش قرار دهیم زیرا مرز کارای بدون محدودیت در مدل میانگین – واریانس به راحتی از طریق برنامه ریزی درجه دوم و به صورت بهینه قابل ترسیم است[۶]. در مورد جزئیات این روش مقایسه، خواننده را به[۱۴ و۶] ارجاع می دهیم. اما در مدل نیمه واریانس،

[6] *Simulated annealing*
[7] *Heat bath*

یافتن مرز کارا به صورت بهینه به خصوص برای مسائل بزرگ مقیاس، تقریباً غیر ممکن است. با این حساب می توان گفت یکی از مشکلات مقایسه الگوریتم های فراابتکاری در یافتن مرز کارای مدل نیمه واریانس، نبود معیار مقایسه است.

از طرف دیگر این یک امر بدیهی است که اگر یک روش فراابتکاری را برای بهینه سازی مدل مشخصی چند بار اجرا کنیم درهر بار اجرا به احتمال زیاد با جواب متفاوتی برای مقدار بهینه (یا نزدیک بهینه) تابع هدف مواجه می شویم. به بیانی دقیق تر می توان گفت خروجی الگوریتم های فراابتکاری در هر بار اجرا، متغیر تصادفی با یک توزیع خاص است. این مطلب ناشی از این حقیقت است که بسیاری از الگوریتم های فراابتکاری و از جمله آنیل شبیه سازی شده و جستجوی ممنوع (همانطور که در قسمت ۵ نیز توضیح داده شد) از عملگرهای تصادفی در فرایند یافتن جواب بهینه بهره می گیرند و اصولاً یکی از دلایل کارایی تکنیک های فراابتکاری در رسیدن به جواب بهینه، جستجوی تصادفی آنها در فضای جواب مسئله است. به عنوان مثال حرکت از یک نقطه به سمت همسایگی آن در هر دو الگوریتم آنیل شبیه سازی شده و جستجوی ممنوع، به صورت تصادفی انجام می شود و همین طور قبول شدن یک جواب بدتر از جواب تکرار قبلی، در الگوریتم آنیل شبیه سازی شده، به صورت تصادفی انجام می شود. لذا یک روش مقایسه الگوریتم های فراابتکاری در بهینه سازی مدل های ریاضی، استفاده از آزمون های آماری می باشد. همانطور که در مقدمه ذکر شد استفاده از روش های آماری برای مقایسه تکنیک های فراابتکاری، یک رویکرد جدید بوده و نه تنها در مورد مسئله بهینه سازی پورتفولیو بلکه در هرزمینه ای که نیازمند مقایسه کارایی دو الگوریتم فراابتکاری هستیم می تواند مورد استفاده قرار گیرد. نکته ای که در مورد استفاده از تکنیک های آماری برای مقایسه الگوریتم های فراابتکاری باید مورد توجه قرار گیرد انتخاب نوع آزمون مناسب است. در این مقاله، توانایی دو الگوریتم آنیل شبیه سازی شده و روش جستجوی ممنوع در یافتن مرز کارا با استفاده از آزمون t زوجی مورد بررسی قرار گرفته است. دلیل استفاده از آزمون t زوجی را می توان به صورت زیر بیان کرد:

همانطور که دربخش های ۳و۴ اشاره شد، هر مقدارλ متناظر با یک نقطه در مرز کارا می باشد و به عبارت دقیقتر برای هرλ، یک مقدار بهینه ریسک و بازده ویک مقدار بهینه برای رابطه (۸) (مقدار تابع هدف) محاسبه می شود. در هر بار اجرای الگوریتم ها، چندین مقدار λ به طور یکنواخت در فاصله صفر ویک مورد بررسی قرار می گیرند (نخستین مقدارλ برابر با صفر و آخرین مقدار آن برابر با یک می‌باشد) بنابراین به تعداد λ های مورد بررسی مقادیر ریسک، بازده و تابع هدف بهینه خواهیم داشت. به عنوان مثال نتیجه اجرای الگوریتم های جستجوی ممنوع و آنیل شبیه سازی شده را برای مدل نیمه واریانس در جدول۱، نشان داده ایم. اطلاعات ورودی مدل در این مثال، مربوط به شاخص سهام DAX در فاصله سال های ۲۰۰۹-۲۰۰۷ می باشد و در اجرای الگوریتم ها ۱۰ مقدار λ بررسی شده است. ستون های f در این جدول، مقادیر تابع هدف را نشان می دهد که با توجه به رابطه ۸ مقدار آن وابسته به مقادیر ریسک و بازده است. در این جدول ملاحظه می‌شود که به عنوان مثال، برای مقدار λ=۰/۷۷۷۷۷۷ ، مقادیر ریسک بهینه که از الگوریتم آنیل شبیه سازی شده و جستجوی ممنوع به دست می آید به ترتیب برابر با ۰/۰۰۴۴۹ و ۰/۰۰۶۱۵ می باشد. توجه داشته باشید که کدنویسی الگوریتم ها طوری انجام شده که می توانیم مشخص کنیم در هر بار اجرای الگوریتم ها چند مقدار λ می خواهیم بررسی شود و همچنین مقادیر λ، همانطور که در جدول نیز ملاحظه می شود، به صورت یکنواخت از صفر یه یک افزایش می یابد. بنابراین برای هر مقدار λ، الگوریتم آنیل شبیه سازی شده یک مقدار و الگوریتم جستجوی ممنوع مقدار دیگری را برای متغیرهای ریسک، بازده و مقدار تابع هدف نتیجه می دهد. به عبارت دقیق تر می توانیم بگوییم که داده های حاصل از اجرای دو الگوریتم به صورت جفت مشاهدات هستند.

در وضعیتی که داده‌های به صورت جفت مشاهدات باشند استفاده از آزمون t زوجی مناسب ترین گزینه برای مقایسه آماری می باشد و با استفاده از این آزمون، می‌توانیم دقت محاسبات و آزمون های آماری را بهبود دهیم[۲۷].

پس از مشخص کردن نوع آزمون مناسب، باید متغیر آزمون و آزمون فرض را مشخص کنیم. به طور کلی فرضی که در مورد هر شاخص سهام مورد آزمون قرار می گیرد می توان به صورت زیر بیان شود.

H0 = توانایی دو الگوریتم در بهینه سازی مدل نیمه واریانس یکسان است.

H1 = توانایی دو الگوریتم در بهینه سازی مدل نیمه واریانس یکسان نیست.

برای اینکه فرض فوق مورد آزمون قرار گیرد باید متغیر های پاسخ مناسبی را انتخاب کنیم. برای هر مقدار λ سه متغیر ریسک، بازده و مقدار تابع هدف را خواهیم داشت که مقدار یکی از آنها وابسته به مقدار دو متغیر دیگر است (به رابطه (۸) توجه کنید) بنابراین می توانیم با انجام آزمون t زوجی برای دو تا از این متغیر ها، فرض فوق را مورد آزمون قرار دهیم. در این مقاله ما به طور اختیاری مقادیر ریسک و تابع هدف را به عنوان متغیر پاسخ انتخاب کرده ایم. با جمع بندی مطالب این بخش، روند مقایسه آماری دو الگوریتم به این صورت خواهد بود که در هر شاخص

سهام، هر کدام از الگوریتم ها را یک بار و با تعداد مورد نظر از λ اجرا کرده و با استفاده از آزمون t زوجی، توانایی دو الگوریتم در یافتن مقادیر ریسک و تابع هدف مورد مقایسه قرار می‌گیرد. براساس نتایج این آزمون ها می توان در مورد توانایی دو الگوریتم در یافتن مرز کارا و بهینه سازی مدل نیمه واریانس نتیجه گیری کرد. توجه داشته باشید که علاوه بر استفاده از آزمون t زوجی می توانستیم از آزمون t دو نمونه‌ای برای مقایسه عملکرد الگوریتم های نیز استفاده کنیم اما با توجه به مطالب عنوان شده در فوق و ساختار مسئله مورد بررسی در این مقاله، استفاده از آزمون t زوجی نه تنها ساده تر بلکه می تواند دقت محاسبات را نیز افزایش دهد.

جدول ۱. نتیجه اجرای الگوریتم ها آنیل شبیه سازی شده و جستجوی ممنوع برای شاخص سهام DAX و با بررسی ۱۰ مقدار λ (ستون f مقادیر تابع هدف را نشان می دهد، اعداد با دقت ۵ رقم اعشار گزارش شده اند).

λ	SA			TS		
	Risk	Return	f	Risk	Return	f
۰	۰/۰۱۷۷۰	۰/۰۴۸۷۳	-۰/۰۴۸۷۳	۰/۰۱۷۷۰	۰/۰۴۸۷۳	-۰/۰۴۸۷۳
۰/۱۱۱۱۱	۰/۰۱۷۷۰	۰/۰۴۸۷۳	-۰/۰۴۱۳۵	۰/۰۱۷۷۰	۰/۰۴۸۷۳	-۰/۰۴۱۳۵
۰/۲۲۲۲۲	۰/۰۱۷۷۰	۰/۰۴۸۷۳	-۰/۰۳۳۹۷	۰/۰۱۷۷۱	۰/۰۴۸۷۳	-۰/۰۳۳۹۷
۰/۳۳۳۳۳	۰/۰۱۵۵۶	۰/۰۴۷۷۴	-۰/۰۲۶۶۴	۰/۰۱۶۸	۰/۰۴۸۳۲	-۰/۰۲۶۶۱
۰/۴۴۴۴۴	۰/۰۱۰۷۷	۰/۰۴۴۷۵	-۰/۰۲۰۰۷	۰/۰۱۴۸۵	۰/۰۴۶۹	-۰/۰۱۹۴۶
۰/۵۵۵۵۵	۰/۰۱۰۸۹	۰/۰۴۲۸۲	-۰/۰۱۲۹۸	۰/۰۱۰۸۳	۰/۰۴۲۷۴	-۰/۰۱۲۹۸
۰/۶۶۶۶۶	۰/۰۰۷۰۵	۰/۰۴۰۳	-۰/۰۰۸۷۳	۰/۰۰۷۰۷	۰/۰۴۰۳۴	-۰/۰۰۸۷۳
۰/۷۷۷۷۷	۰/۰۰۴۴۹	۰/۰۳۱۳۸	-۰/۰۰۳۸۴	۰/۰۰۶۱۵	۰/۰۳۷۹	-۰/۰۰۳۶۴
۰/۸۸۸۸۸	۰/۰۰۲۱۴	۰/۰۲۰۰۸	-۰/۰۰۰۳۳	۰/۰۰۱۱۱	۰/۰۰۸۴۱	۰/۰۰۰۰۵۴
۱	۰/۰۰۰۷۸	۰/۰۰۰۶۶	۰/۰۰۰۷۸	۰/۰۰۰۶۱	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۶۱

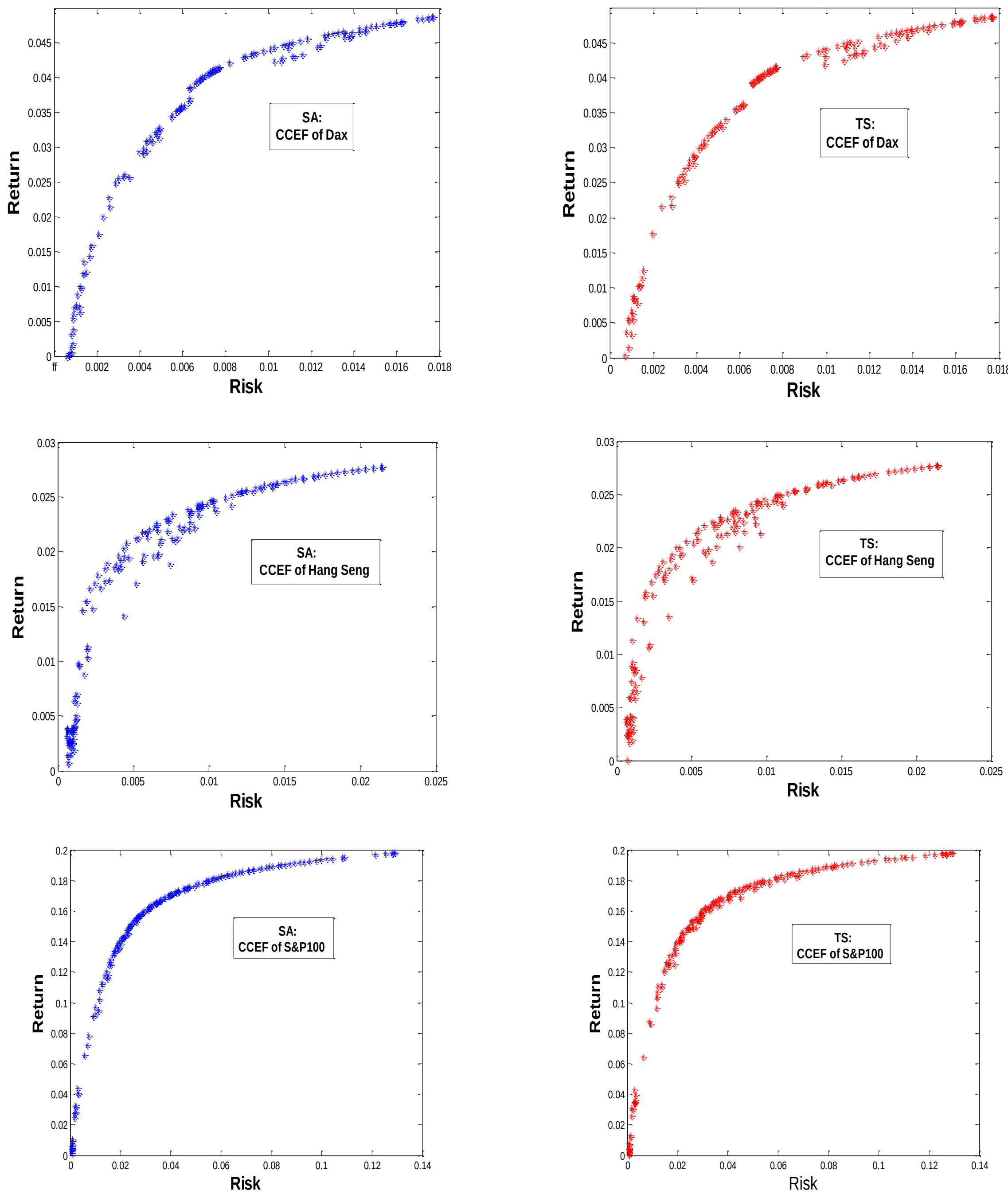
۷. نتایج تحقیق

برای مقایسه عملکرد دو الگوریتم، اطلاعات مربوط به ارزش تاریخی سهام در فاصله سالهای ۲۰۰۷ تا ۲۰۰۹ را برای سه شاخص سهام S&P100، Hang Seng و DAX به ترتیب با تعداد سهم ۳۶،۹۳و۲۹ و در فاصله های زمانی ماهیانه جمع آوری شده و به عنوان ورودی مدل مورد بررسی قرار گرفته اند. لازم به ذکر است که سهامی را که اطلاعات تاریخی آنها در این فاصله به طور کامل وجود نداشته از بررسی حذف کرده ایم. در تمام اجراهای انجام شده و برای هر دو الگوریتم K برابر با ۱۰، ε_i برابر با ۰،۰۱و δ_i برابربا یک درنظر گرفته شده و در مقایسه آماری دو الگوریتم، تعداد λ مورد بررسی ۱۰ بوده است. کد نویسی الگوریتم ها در نرم افزار Matlab 9 انجام گرفته است.

در مورد هر شاخص سهام دو آزمون t و در کل شش آزمون انجام خواهیم داد. فرض صفر را بر برابری متغیر پاسخ مورد آزمون (ریسک و یا مقدار تابع هدف) در دو سطح و فرض یک را بر نابرابری آن قرار می دهیم. در جدول ۲ نسبت زمان اجرای دو الگوریتم و نتایج انجام آزمون t را برای مقایسه دو الگوریتم و با در نظر گرفتن مقادیر ریسک و مقادیر تابع هدف به عنوان متغیر های پاسخ ملاحظه می کنید. سطح معنا دار بودن در این آزمون‌ها ۰/۹۵ در نظر گرفته شده است. با توجه به مقادیر p-value می توان نتیجه گرفت که در مورد تمام آزمون ها، دلیلی بر رد فرض صفر وجود ندارد به عبارت دیگر می توان گفت که توانایی این دو الگوریتم در بهینه سازی مدل نیمه واریانس و به تبع آن یافتن مرز کارا یکسان است. با توجه به سرعت بیشتر الگوریتم جستجوی ممنوع در رسیدن به جواب بهینه، در حالت کلی، برای یافتن مرز کارا تحت مدل نیمه واریانس، استفاده از این الگوریتم پیشنهاد می شود. اما با توجه به اینکه تفاوتی در توانایی الگوریتم ها برای بهینه سازی مدل نیمه واریانس مشاهده نمی شود، یک راه حل مناسب تر، استفاده از هر دو الگوریتم برای حل مسئله است. این رویکرد توسط نویسندگان مختلف ازجمله چانگ و همکاران[۶] پیشنهاد شده است. در شکل ۱ مرز کارای محدودیت اصلی رسم شده توسط دو الگوریتم را ملاحظه می کنید. برای رسم این منحنی ها ۲۰۰ مقدار مختلف λ مورد بررسی قرار گرفته اند. منحنی های ستون سمت چپ با الگوریتم آنیل شبیه سازی شده و منحنی های سمت راست با الگوریتم جستجوی ممنوع ترسیم شده است. ردیف ۱ مربوط به شاخص DAX، ردیف ۲ مربوط به Hang Seng و ردیف ۳ مربوط به شاخص S&P100 می باشد.

جدول ۲. نسبت زمان اجرای دو الگوریتم و نتایج آزمون t برای هر شاخص سهام

شاخص سهام	تعداد سهم	نسبت زمان اجرای آنیل شبیه سازه شده به جستجوی ممنوع	متغیر پاسخ	P- value
DAX	۲۹	۱/۷۳	مجموع مقادیر ریسک	۰/۲۴۰
			مجموع مقادیر تابع هدف	۰/۳۸۵
Hang Seng	۳۶	۱/۶۶	مجموع مقادیر ریسک	۰/۱۴۸
			مجموع مقادیر تابع هدف	۰/۱۱۷
S&P100	۹۳	۱/۸	مجموع مقادیر ریسک	۰/۱۲۷
			مجموع مقادیر تابع هدف	۰/۱۵۰



شکل ۱. مرز کارای محدودیت اصلی ترسیم شده توسط الگوریتم ها

همانطور که قبلاً ذکر شد، اطلاعات در دوره های زمانی ماهیانه جمع آوری شده است. شایان ذکر است هر چقدر دوره های زمانی جمع آوری اطلاعات کوتاهتر باشد مرز کارای ترسیم شده در محور ریسک کوتاهتر می شود. به بیانی دقیق تر ما با مقادیر ریسک کوچکتری سروکار داریم. توجیه این مسئله را می توان با دقت در رابطه (۱۲) یافت. زیرا هر چقدر فاصله زمانی جمع آوری اطلاعات طولانی تر باشد تغییرات بیشتری را در v_{it}) ارزش سهم i ام در دوره t) شاهد خواهیم بود و به تبع آن تغییرات بیشتری در مقادیر r_t) بازده پورتفولیو در دوره t ام)خواهیم داشت و در نهایت مقادیر ریسک بزرگتری حاصل می شود.

ما در این مقاله از آزمون t زوجی برای مقایسه توانایی الگوریتم های فراابتکاری در رسیدن به جواب بهینه و یافتن مرز کارا استفاده کردیم. بدیهی است در حالتیکه مقایسه بیش از دو الگوریتم فراابتکاری مورد نظر باشد می توان از تحلیل واریانس[1] و تحلیل های بلوکی استفاده کرد.

۸. نتیجه گیری

در این مقاله دو الگوریتم فراابتکاری آنیل شبیه سازی شده و جستجوی ممنوع برای مسئله بهینه سازی پورتفولیو تحت معیار ریسک نیمه واریانس معرفی و عملکرد این دو الگوریتم در رسم مرز کارای محدودیت اصلی با استفاده از آزمون t زوجی مورد مقایسه قرار گرفت. علاوه بر آن، محدودیت مربوط به تعداد سهام پورتفولیو و نسبت پورتفولیو در هر سهم را در مدل ریاضی مسئله منظور کردیم. اطلاعات مربوط به ارزش تاریخی سهام در فاصله های زمانی ماهیانه جمع آوری و به عنوان ورودی مدل منظور گردیده است.

نشان دادیم با کوتاهتر شدن فاصلهٔ زمانی جمع آوری (مشاهده) اطلاعات، مرز کارا در محور ریسک کوتاهتر می شود به عبارت دقیق تر ما با مقادیر ریسک کوچکتری مواجه می شویم. تا آنجایی که نویسندگان این مقاله اطلاع دارند، این نخستین مقاله ای است که در آن از الگوریتم آنیل شبیه سازی شده برای بهینه سازی پورتفولیو تحت معیار ریسک – نیمه واریانس استفاده شده است. به علاوه در این مقاله روشی نوین برای مقایسه عملکرد الگوریتم های فراابتکاری با استفاده از آزمون t پیشنهاد شده است. کار تحقیقی ذکر شده در این مقاله را می توان از جهات زیادی توسعه داد از جمله: استفاده از الگوریتم های دیگر برای بهینه سازی مدل نیمه واریانس، در نظر گرفتن معیار های دیگر ریسک در مسئله انتخاب پورتفولیو، استفاده از تحلیل واریانس برای مقایسه الگوریتم های فراابتکاری در حالتیکه مقایسه بیش از دو الگوریتم مورد نظر باشد.

مراجع

[۱] داگلاس سی. مونتگوموری، ترجمه دکتر رسول نورالسنا، «طراحی و تحلیل آزمایش ها»، انتشارات دانشگاه علم و صنعت، صفحه ۸۵، ۱۳۸۶.

[2] Markowitz, H.M., "*Portfolio Selection"*, Journal of Finance, Vol. 7, 1952, pp. 77–91.

[3] Markowitz, H.M., *"Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments"*, New York: Yale University Press, John Wiley, 1991.

[4] Tun-Jen Chang, Sang-Chin Yang, Kuang-Jung Chang *"Portfolio Optimization Problems in Different Risk Measures using Genetic Algorithm"*, Expert Systems with Applications, Vol. 36, 2009, pp.10529-10537

[5] Jia, J., Dyer, J.S., *"A Standard Measure of Risk and Risk-Value Models"*, Management Science, Vol. 42, 1996, pp. 1691–1705.

[6] Mills, TC., "*Stylized Facts on the Temporal and Distributional Properties of Daily FT-SE Returns*", Applied Financial Economics, Vol.7, 1997, pp. 599-604.

[7] Chan, T.J., Meade, N., Beasley, J.E., Sharaiha, Y.M., *"Heuristics for Cardinality Constrained Portfolio Optimization"*, Computers & Operations Research, Vol. 27, 2000, pp. 1271-1302.

[8] Anagnostopoulos, K.P., Mamanis, G.M., "*A Portfolio Optimization Model with Three Objectives and Discrete Variables"*, Computer & Operations Research, Vol. 37, 2010, pp.1285-1297.

[9] Pankaj Gupta, Mukesh Kumar Mehlawat, Anand Saxena, "*Asset Portfolio Optimization using Fuzzy Mathematical Programming"*, Information Sciences, Vol. 178, 2008, 1734-1755.

[10] Bienstock, D., "*Computational Study of a Family of Mixed-Integer Quadratic Programming Problems"*, Mathematical Programming, Vol. 74 (2), 1996, pp. 121–140.

[11] Jobst, N.J., Horniman, M.D., Lucas, C.A., Mitra, G., *Computational Aspects of Alternative Portfolio Selection Models in the Presence of Discrete Asset Choice Constraints*, Quantitative Finance, Vol. 1,2001, pp. 489–501.

[12] Brank, J., Sceckenbach, B., Staein, M., Deb, K., Scmeck, H., *"Portfolio Optimization with an Envelope-Based Multi-Objective Evolutionary Algorithm"*,

[1] *Analysis of variance*

Eouropean Journal of Operational Reaserch, Vol. 199, 2009, pp. 684-693.

[13] Soleimani, H., Golmakani, H.R., Hossein Salimi, M., "*Markowitz-Based Portfolio Selection with Minimum Transaction Lots, Cardinality Constraints and Regarding Sector Capitalization using Genetic Algorithm"*, Expert Systems with Applications, Vol. 36, 2009, pp. 5058-5063.

[14] Sang-Chin Yang, Ting-Li Lin, Tun-Jen Chang, Kuang-Jung Chang, *"A Semi-Variance Portfolio Selection Model for Military Investment Assets*", Expert Systems with Applications , 2010, Article in press.

[15] Tunchan Cura, "*Particle Swarm Optimization Approach to Portfolio Optimization",* Nonllinear Analysis: Real World Applications, Vol. 10, 2009, pp. 2396-2406.

[16] Alberto Fernandez, Sergio Gomez, "*Portfolio Selection using Neural Networks"*, Computers & Operations Research, Vol. 34, 2007, pp. 1177-1191.

[17] Crama, Y., Schyns, M., *"Simulated Annealing for Complex Portfolio Selection Problems*", Eouropean Journal of Operational Reaserch, Vol. 150, 2003, pp. 546-571.

[18] Markowitz, H.M., *"Portfolio Selection: Effcient Diversication of Investments"*, New York: Wiley, 1959.

[19] Unser M, *"Lower Partial Moments as Measures of Perceived Risk: an Experimential Study"*, Journal of Economic Psychology, Vol. 21, 2000, pp. 253-280.

[20] Choobineh, F., Branting, D., *"A Simple Approximation for Semivariance"*, European Journal of Operational Research, Vol. 27, 1986, pp. 364-370.

[21] Kaplan, P.D., Alldredge, R.H., *"Semivariance in Risk-Based Index Construction: Quantidex Global Indexes"*, The Journal of Investing, Vol. 6, 1997, pp. 82-87.

[22] Huang, X, *"Portfolio Selection with a New Definition of Risk"*, European Journal of Operational Research, Vol. 186, 2008, pp.351-357.

[23] Glover, F., *"Future Paths for Integer Programming and Links to Artificial Intelligence"*, Computers & Operations Research, Vol.13, 1986, pp. 533-549.

[24] Hansen, P., *"The Steepest Ascent Mildest Descent Heuristic for Combinatorial Programming"*, Presented at the Congress on Numerical Methods in Combinatorial Optimization, Capri, Italy, 1986.

[25] Metropolis, N., Rosenbluth, A.W., Rosenbluth, M.N., Teller AH & Teller E, *"Equation of State Calculations by Fast Computing Machines"*, Journal of Chemical Physics, Vol. 21, 1953, pp. 1087-1092.

[26] Kirkpatrick, S., Gelatt, C.D., Vecchi, M.P., *"Optimization by Simulated Annealing"*, Science, Vol. 220, 1983, pp. 671-680.

[27] Cerny V, *"Thermodynamical Approach to the Travelling Salesman Problem: an Efficient Simulation Algorithm"*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 45, 1985, pp. 41-51.