



## Due Date Assignment for Delivery Time in Multi-Server Dynamic PERT Networks

S. Noori\* & S. Yaghoubi

Siamak Noori, Associate professor, Department of Industrial Engineering, Iran University of Science & Technology,  
Saeed Yaghoubi, Assistant Professor, Department of Industrial Engineering, Iran University of Science & Technology, yaghoubi@iust.ac.ir

### Keywords

Project management,  
Queueing network,  
Markov process

### ABSTRACT

*In this paper, multi-class dynamic PERT network is considered as a queueing network, where the projects are similar and new projects are generated according to a Poisson process. Each activity is performed independently in its corresponding service station with exponential distribution by one server from several servers settled in the service station based on FCFS (First Come, First Served) discipline. Also, each project's end result has a penalty cost that is some linear function of its due-date and its actual completion time. In this investigation, for computing the due date for multi-class dynamic PERT network, we first convert the queueing network into a stochastic network. Then, by constructing an appropriate finite-state continuous-time Markov model, a system of differential equations is created to solve and find the project completion time distribution for any particular project, analytically. Finally, the optimal due date for delivery time is obtained by using a linear function of its due-date and minimizing the expected aggregate cost per project.*

© 2013 IUST Publication, IJIEPM. Vol. 23, No. 4, All Rights Reserved

\*  
Corresponding author. Siamak Noori  
Email: [snoori@iust.ac.ir](mailto:snoori@iust.ac.ir)

## تعیین موعد مقرر تحویل پروژه در شبکه‌های پرت پویا با چندین خدمت‌دهنده

سیامک نوری\* و سعید یعقوبی

### چکیده:

در این مقاله، شبکه‌های پرت‌پویا با چندین خدمت‌دهنده به صورت یک شبکه صف در نظر گرفته شده است، به طوری که پروژه‌های ورودی کاملاً مشابه بوده و طبق فرآیند پواسون وارد سازمان می‌شوند. فعالیت‌ها به طور مستقل از هم و با توزیع نمایی در ایستگاه‌کاری متناظر خود و فقط توسط یک خدمت‌دهنده از میان چندین خدمت‌دهنده موجود و با نظم اولین ورودی، اولین سرویس (FCFS) انجام می‌شوند. همچنین هر پروژه یک هزینه جریمه‌ای برحسب زمان تکمیل واقعی پروژه و زمان متعهد شده توسط مجری پروژه، به خود اختصاص می‌دهد. در این پژوهش، برای بدست آوردن زمان ثابت موعدمقرر در شبکه‌های پرت‌پویا با چندین خدمت‌دهنده، ابتدا شبکه صف را به یک شبکه احتمالی تبدیل نموده و با ایجاد یک مدل مارکوفی مناسب که دارای حالات محدود و زمان پیوسته می‌باشد، معادله دیفرانسیلی سیستم تشکیل می‌گردد که در نتیجه می‌توان تابع توزیع زمان تکمیل هر پروژه را بدست آورد. در نهایت با بهره‌گیری از یک تابع جریمه خطی و حداقل کردن میانگین هزینه‌های کلی هر پروژه، موعدمقرر برای تحویل پروژه‌ها بدست می‌آید.

### کلمات کلیدی

مدیریت پروژه،  
شبکه صف،  
فرآیندهای مارکوفی.

### ۱. مقدمه

در سال‌های اخیر، رویکرد پروژه محوری به عنوان یک دیدگاه اصلی، در بسیاری از سازمان‌ها اتخاذ شده است به طوری که فعالیت‌ها و اقدامات سازمان‌ها براساس پروژه‌های‌شان انجام می‌شوند. در چنین شرایطی، سازمان‌ها اغلب با یک سیستم چندپروژه‌ای<sup>۲</sup> روبرو هستند که برای بهره‌برداری هر چه بهتر از امکانات و منابع، آنها را در بین تمامی پروژه‌های سازمان به اشتراک می‌گذارند. در این گونه سازمان‌ها، به سبب اجرای هم‌زمان چندین پروژه، مسئله برنامه‌ریزی چندپروژه‌ای<sup>۳</sup> مطرح شده که

عموماً به وسیله اضافه نمودن فعالیت‌های مجازی ابتدایی و انتهایی، و در نظر گرفتن هر پروژه به عنوان یک زیرپروژه و ایجاد یک پروژه بزرگ، و یا با در نظر گرفتن پروژه‌ها به عنوان اجزای مستقل و به کار بردن یک یا چندین تابع هدف که شامل همه آنها باشد، مورد مطالعه قرار می‌گیرد. از اولین مطالعات انجام شده در زمینه مسئله برنامه‌ریزی چندپروژه‌ای می‌توان به [۴-۱] اشاره کرد. لازم به ذکر است که مدل‌های چندهدفه [۵]، چندمعیاره [۶] و همچنین روش‌های فراابتکاری و ابتکاری [۷-۱۳]، توسط محققان در تحلیل مسئله مذکور مورد استفاده واقع شده است. فعالیت‌های پروژه در حین اجراء، اغلب در معرض عدم قطعیت<sup>۴</sup> قرار دارند که ممکن است منجر به اختلالات فراوان در برنامه‌ریزی شود [۱۴]. از سوی دیگر در برخی از سازمان‌های چندپروژه‌ای، علاوه بر عدم قطعیت در زمان انجام فعالیت‌ها، ممکن است پروژه‌ها به صورت پویا و احتمالی، در گذر زمان وارد سازمان شوند، که این موضوع برنامه‌ریزی پروژه را پیچیده‌تر و دشوارتر از پیش می‌نماید.

تاریخ وصول: ۹۰/۲/۳۱

تاریخ تصویب: ۹۰/۹/۲۶

\* نویسنده مسئول مقاله: دکتر سیامک نوری، دانشیار دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران، snoori@iust.ac.ir  
سعید یعقوبی، استادیار دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران، yaghoubi@iust.ac.ir

<sup>2</sup> Multi-project system

<sup>3</sup> Multi-project scheduling problem

<sup>4</sup> Uncertainty

خدمت‌دهنده‌ها<sup>۲</sup> و منابع موثر بر خدمت‌دهنده‌ها<sup>۳</sup> در تخصیص منابع، شبکه‌های پرت‌پویا با چندین خدمت‌دهنده در هر ایستگاه کاری را با ارائه مدل‌های برنامه‌ریزی احتمالی چندهدفه، مدل نمودند.

اخیراً هم مسئله تخصیص موادمقرر برای تحویل پروژه در شبکه‌های پرت‌پویا با فرض مستقر بودن یک و یا بی‌نهایت خدمت‌دهنده در هر ایستگاه کاری و نامحدود بودن ظرفیت سیستم، توسط آذرون و همکاران [۲۳] مطرح شده و یک الگوریتم برای محاسبه موادمقرر ارائه شده است. لازم به ذکر است که در این مقاله با تعمیم مطالعه آذرون و همکاران [۲۳]، مسئله تخصیص موادمقرر برای تحویل پروژه در شبکه‌های پرت‌پویا با چندین خدمت‌دهنده و ظرفیت نامحدود، توسط یک زنجیره مارکوفی با تعداد حالات محدود و زمان پیوسته مورد مطالعه قرار خواهد گرفت و این درحالی است که مسئله تخصیص منابع که مسئله‌ای متفاوت با مسئله تخصیص موادمقرر برای تحویل پروژه در شبکه‌های پرت‌پویا می‌باشد، در تحقیقات [۲۳-۲۰] توسط برنامه‌ریزی چندهدفه احتمالی مدل شده است.

تحقیقات متعددی درخصوص طولانی‌ترین مسیر یا زمان تکمیل پروژه در شبکه‌های احتمالی (شبکه‌های پرت کلاسیک) انجام پذیرفته است، به طوری که برخی از این مطالعات، این مقوله را به صورت تحلیلی مورد پژوهش قرار داده‌اند و این در حالی است که تحقیقات اندکی در حوزه طولانی‌ترین مسیر در شبکه‌های صف و یا زمان تکمیل پروژه در شبکه‌های پرت‌پویا صورت پذیرفته است. یک برنامه‌ریزی تصادفی برای شبکه‌های احتمالی با فرض نمایی بودن فعالیت‌ها در [۲۴] و نیز یک روش سیستماتیک کاهش دادن شبکه به فعالیت‌های سری-موازی در [۲۵]، جهت محاسبه طولانی‌ترین مسیر در شبکه‌های احتمالی ارائه شده است. همچنین، برنامه‌ریزی پویا هم برای مدل نمودن مسئله مذکور در [۲۶] مطرح شده است. کالکرنی و آدلاخا [۲۷] با فرض نمایی بودن فعالیت‌ها، شبکه پرت را به یک زنجیره مارکوفی با تعداد حالات محدود و زمان پیوسته که دارای حالت جذب‌کننده‌ای می‌باشد، تبدیل نمودند و به کمک آن تابع توزیع تکمیل پروژه را محاسبه نمودند. گفتنی است که یک دسته‌بندی خوبی بر روی شبکه‌های احتمالی در [۲۸] صورت پذیرفته است. همچنین، برخی از مطالعات مانند [۲۹-۳۲]، به علت سختی و پیچیدگی در محاسبه توزیع زمان تکمیل پروژه، تکنیک‌های تقریبی و یا حد پایین برای زمان تکمیل پروژه ارائه نموده‌اند. با توجه به مطالب ذکر شده می‌توان چنین نتیجه گرفت که هیچ روش تحلیلی برای بدست آوردن موادمقرر تحویل پروژه در

این نوع از مسائل که علاوه بر احتمالی بودن فعالیت‌ها، ورود پروژه‌ها نیز در یک محیط پویا و به صورت احتمالی صورت پذیرد، شبکه‌های پرت‌پویا<sup>۱</sup> نام‌گذاری شده است.

مسئله مذکور با استفاده از دیدگاه فرآیندی در [۱۵] مورد مطالعه قرار گرفت، به طوری که سازمان به صورت یک شبکه پردازشی احتمالی<sup>۲</sup> در نظر گرفته شد که دارای چندین ایستگاه کاری می‌باشد. پروژه‌ها به صورت احتمالی و در گذر زمان وارد سازمان شده و هر ایستگاه کاری که چندین خدمت‌دهنده را در خود جای داده است، در حال خدمت دادن به فعالیت‌های مرتبط به خود می‌باشد که در چنین شرایطی سازمان با یک شبکه صف روبرو می‌شود. مولفان زمان تکمیل پروژه را با بهره‌گیری از شبیه‌سازی مورد مطالعه قرار دادند. لازم به ذکر است که در این دیدگاه فرآیندی سازمان به صورت یک سیستم واحد تلقی شده که پروژه‌ها جهت دریافت خدمت، به طور مستمر وارد سازمان شده و منابع مشترکاً در اختیار تمامی پروژه‌ها قرار می‌گیرد. در چنین سیستم‌هایی، پروژه‌ها پس از طی ایستگاه‌های کاری بر اساس شبکه پیش‌نیازی خود، پایان پذیرفته و آماده تحویل به کارفرمای خود می‌باشند که با توجه به ماهیت شبکه‌های پروژه، زمان تکمیل پروژه معادل طولانی‌ترین مسیر شبکه صف خواهد بود. همچنین شبکه‌های پرت‌پویا با در نظر گرفتن چندین خدمت‌دهنده در هر ایستگاه کاری و ظرفیت محدود در پذیرش پروژه‌ها با استفاده از شبیه‌سازی در [۱۶] مورد مطالعه قرار گرفت. همچنین مسئله تخصیص منابع در شبکه‌های پرت‌پویا با ظرفیت محدود با استفاده از شبیه‌سازی در [۱۷] و [۱۸] مورد پژوهش قرار گرفت.

از طرف دیگر، آذرون و مدرس [۱۹] شبکه‌های پرت‌پویا را با استفاده از یک روش تحلیلی به منظور به دست آوردن تابع توزیع زمان تکمیل پروژه مورد مطالعه قرار داده و سپس آذرون و توکلی مقدم [۲۰] مسئله تخصیص منابع (موازنه زمان-هزینه) را با ارائه یک مدل برنامه‌ریزی چندهدفه احتمالی در شبکه‌های پرت‌پویا مطرح نمودند. مولفان فرض کردند که پروژه‌ها با توزیع پواسون وارد یک سیستم چندپروژه‌ای با ظرفیت نامحدود شده و توزیع زمان انجام فعالیت‌ها نمایی می‌باشد، درحالی که در هر ایستگاه کاری یک و یا بی‌نهایت خدمت‌دهنده مستقر می‌باشد. همچنین، یعقوبی و همکاران [۲۱] مسئله تخصیص منابع در شبکه‌های پرت‌پویا را با فرض محدود بودن ظرفیت سیستم در پذیرش پروژه‌های ورودی مورد پژوهش قرار دادند. علاوه بر این، یعقوبی و همکاران [۲۲] با مطرح نمودن دو دیدگاه منابع به عنوان

<sup>3</sup> Resources as servers

<sup>4</sup> Resources affecting servers

<sup>1</sup> Dynamic PERT networks

<sup>2</sup> Stochastic processing network

و توزیع فعالیت‌ها) کاملاً مشابه بوده و طبق فرآیند پواسون با نرخ  $\lambda$  وارد سازمان می‌شوند. همچنین فرض بر این است که تعداد  $m_a$  خدمت‌دهنده در ایستگاه کاری  $a$  ام مستقر شده و فعالیت‌ها به‌طور مستقل از هم، با توزیع نمایی و فقط توسط یکی از خدمت‌دهنده‌های هر ایستگاه با نظم  $FCFS$  انجام می‌شوند. زمان انجام فعالیت  $a$  ام در ایستگاه کاری  $a$ ، دارای توزیع نمایی با پارامتر  $\mu_a$  بوده و نیز ظرفیت سیستم و ظرفیت ایستگاه‌های کاری نامتناهی در نظر گرفته شده‌است.

## ۲-۱. فرآیند مارکوفی با زمان پیوسته

در این قسمت هدف ارائه یک زنجیره مارکوفی با حالات محدود و زمان پیوسته با توجه به فرضیات بیان‌شده برای شبکه‌های پرت پویا با چندین خدمت‌دهنده می‌باشد که بدین منظور مراحل ذیل ارائه می‌گردد:

قدم ۱. تابع چگالی زمان صرف‌شده در هر ایستگاه کاری محاسبه‌شود.

قدم ۱.۱. اگر یک خدمت‌دهنده در ایستگاه کاری  $a$  ام ساکن شده باشد، در این صورت سیستم  $M/M/1$  بوده و تابع توزیع زمان صرف‌شده در سیستم (زمان انتظار در صف و زمان دریافت خدمت) به‌صورت زیر خواهد بود:

$$w_a(t) = (\mu_a - \lambda).e^{-(\mu_a - \lambda)t} \quad t > 0, \text{ if } m_a = 1 \quad (1)$$

که در آن  $\lambda$  نرخ ورود پروژه‌هاست که با فرآیند پواسون ایجاد می‌شوند و نیز  $\mu_a$  نرخ ارائه خدمت در ایستگاه کاری  $a$  ام با تابع توزیع نمایی می‌باشد. یعنی زمان صرف‌شده در ایستگاه کاری  $a$  ام با یک خدمت‌دهنده، دارای توزیع نمایی با پارامتر  $(\mu_a - \lambda)$  خواهد بود.

قدم ۲.۱. اگر بی‌نهایت خدمت‌دهنده در ایستگاه کاری  $a$  ام وجود داشته باشد، در این صورت سیستم  $M/M/\infty$  بوده و تابع توزیع زمان صرف‌شده در سیستم، توزیع نمایی با پارامتر  $\mu_a$  خواهد بود.

$$w_a(t) = \mu_a.e^{-\mu_a t} \quad t > 0, \text{ if } m_a = \infty \quad (2)$$

قدم ۳.۱. اگر  $1 < m_a < \infty$  خدمت‌دهنده در ایستگاه کاری  $a$  ام استقرار یافته باشد، در این صورت سیستم  $M/M/m_a$  بوده و تابع توزیع زمان صرف‌شده در سیستم، به‌طور تقریبی برابر است با دو توزیع نمایی سری با پارامترهای

شبکه‌های پرت پویا با چندین خدمت‌دهنده انجام نشده‌است. در نتیجه، نوآوری این پژوهش ارائه یک روش تحلیلی به کمک زنجیره مارکوفی با تعداد حالات محدود و زمان پیوسته جهت تعیین تابع توزیع زمان تکمیل پروژه در شبکه‌های پرت پویا با چندین خدمت‌دهنده و نیز ارائه یک الگوریتم جهت تعیین موعد مقرر تحویل پروژه می‌باشد. لازم به یادآوری است که در مطالعه [۲۳]، فرض بر این است که در هر ایستگاه کاری یک و یا بی‌نهایت خدمت‌دهنده مستقر شده‌است، در حالی که در این مقاله این فرض به‌صورت کلی در نظر گرفته شده‌است.

در این پژوهش، فرض شده‌است که پروژه‌های ورودی کاملاً مشابه بوده و طبق فرآیند پواسون وارد سازمان می‌شوند. فعالیت‌ها به‌طور مستقل از هم و با توزیع نمایی در ایستگاه کاری متناظر خود و فقط توسط یک خدمت‌دهنده از میان چندین خدمت‌دهنده موجود با نظم اولین ورودی، اولین سرویس ( $FCFS$ )<sup>۱</sup>، انجام می‌شوند.

همچنین، هر پروژه یک هزینه جریمه‌ای برحسب زمان تکمیل واقعی پروژه و زمان انجام متعهد شده توسط مجری پروژه، به‌خود اختصاص می‌دهد. در این مقاله، برای بدست آوردن زمان ثابت موعد مقرر تحویل پروژه در شبکه‌های پرت پویا با چندین خدمت‌دهنده، ابتدا شبکه صف را به یک شبکه احتمالی تبدیل نموده و با ایجاد یک مدل مارکوفی مناسب که دارای حالات محدود و زمان پیوسته می‌باشد، معادله دیفرانسیلی سیستم تشکیل می‌گردد که در نتیجه می‌توان تابع توزیع زمان تکمیل هر پروژه را بدست آورد. سپس با بهره‌گیری از یک تابع جریمه خطی و حداقل کردن میانگین مجموع هزینه‌های هر پروژه، موعد مقرر برای تحویل هر پروژه بدست می‌آید.

در ادامه مقاله، در بخش ۲ یک مدل مارکوفی با حالات محدود و زمان پیوسته برای شبکه‌های پرت پویا با چندین خدمت‌دهنده جهت بدست آوردن تابع توزیع زمان تکمیل پروژه ارائه خواهد شد و نیز الگوریتم تعیین موعد مقرر تحویل پروژه در شبکه‌های پرت پویا با چندین خدمت‌دهنده، در بخش ۳ ارائه خواهد شد. در بخش ۴ یک مثال عددی بیان‌شده و در انتها، نتیجه‌گیری و پیشنهادات برای مطالعات آتی در بخش ۵ ذکر خواهد شد.

## ۲. شبکه‌های پرت پویا با چندین خدمت‌دهنده

در این قسمت، هدف مدل نمودن شبکه پرت پویا با چندین خدمت‌دهنده به‌کمک یک زنجیره مارکوفی با تعداد حالات محدود و زمان پیوسته و سپس تعیین تابع توزیع زمان تکمیل هر پروژه می‌باشد، به‌طوری که پروژه‌های ورودی دارای ساختار (پیشینازی

<sup>۱</sup> First Come, First Served (FCFS)

نمایی مناسب، شبکه برداری جدید (یا شبکه پرت کلاسیک جدید) بدست می‌آید.

قدم ۳. تابع توزیع زمان تکمیل پروژه را براساس شبکه بدست‌آمده در قسمت ۲،۲ تعیین نمایید. بدین منظور می‌بایست دو مرحله اساسی زیر لحاظ گردد:

قدم ۱.۳. یک فرآیند مارکوفی با حالات محدود تشکیل دهید.

قدم ۲.۳. معادلات دیفرانسیلی سیستم را بدست آورده و سپس تابع توزیع زمان تکمیل پروژه را بدست آورید.

در ادامه، قدم ۳ که برای تعیین تابع توزیع زمان تکمیل پروژه بیان‌شده‌است، بیشتر شرح داده خواهد شد.

فرض کنید  $G' = (V', A')$  شبکه برداری بدست‌آمده در قدم ۱،۲ باشد که در آن  $V'$  بیانگر مجموعه گره‌ها و  $A'$  نشان‌دهنده مجموعه فعالیت‌ها می‌باشد.

همچنین فرض کنید  $G = (V, A)$  شبکه برداری جدید بدست‌آمده در قدم ۲،۲ باشد، به طوری که  $V$  بیانگر مجموعه گره‌ها و  $A$  نشان‌دهنده مجموعه کمان‌ها می‌باشد. لازم به ذکر است که در طول این مقاله واژه‌های فعالیت و کمان معادل بوده و ممکن است به جای یکدیگر استفاده شوند. همچنین گره  $s$ ، نشان‌دهنده گره ابتدایی و گره  $v$ ، نمایانگر گره انتهایی در شبکه  $G$  می‌باشد، در حالی که برای هر  $a \in A$ ،  $\alpha(a)$  را گره شروع فعالیت  $a$  و  $\beta(a)$  را گره پایانی فعالیت  $a$  تعریف می‌نمائیم. علاوه بر موارد ذکر شده، تعاریف زیر را برای مسئله مورد بحث در نظر می‌گیریم:

تعریف ۱.  $I(v)$  را به‌عنوان مجموعه کمان‌هایی که به گره  $v$  در شبکه برداری جدید، بدست‌آمده در قدم ۲،۲ خاتمه می‌پذیرند و  $O(v)$  را مجموعه کمان‌هایی که از گره  $v$  در شبکه مذکور شروع می‌شوند، تعریف می‌کنیم. یعنی داریم:

$$I(v) = \{a \in A : \beta(a) = v\} \quad (v \in V), \quad (4)$$

$$O(v) = \{a \in A : \alpha(a) = v\} \quad (v \in V). \quad (5)$$

تعریف ۲. اگر  $X \subset V$  چنانچه  $s \in X$  و  $y \in \bar{X} = V - X$  باشد، در این صورت  $(X, \bar{X})$ ، مجموعه کمان‌هایی که شروع در  $X$  و پایان در  $\bar{X}$  باشد را نمایش خواهد داد. یعنی برای برش  $(s, v)$  داریم:

$$(X, \bar{X}) = \{a \in A : \alpha(a) \in X, \beta(a) \in \bar{X}\}. \quad (6)$$

$(\frac{m_a \mu_a - \lambda}{\rho_a})$  و  $(\frac{m_a \mu_a}{m_a - 1})$ ، در حالی که  $\rho_a = \frac{\lambda}{m_a \mu_a}$ . در نتیجه

تابع توزیع زمان صرف‌شده در ایستگاه کاری  $a$  مأم به‌طور تقریبی برابر خواهد بود: (برای جزئیات بیشتر پیوست را مطالعه نمایید.)

$$w_a(t) \approx \left( \frac{\frac{m_a \mu_a}{m_a - 1}}{\frac{m_a \mu_a}{m_a - 1} - \frac{m_a \mu_a - \lambda}{\rho_a}} \right) \left( \frac{m_a \mu_a - \lambda}{\rho_a} \right) e^{-\frac{m_a \mu_a - \lambda}{\rho_a} t} - \left( \frac{\frac{m_a \mu_a - \lambda}{\rho_a}}{\frac{m_a \mu_a}{m_a - 1} - \frac{m_a \mu_a - \lambda}{\rho_a}} \right) \left( \frac{m_a \mu_a}{m_a - 1} \right) e^{-\frac{m_a \mu_a}{m_a - 1} t} \quad t > 0 \quad (3)$$

قدم ۲. شبکه پرت‌پویا، که به‌صورت شبکه فعالیت گرهی (AoN) نشان‌داده می‌شود، به یک شبکه پرت کلاسیک (شبکه برداری) (AoN) معادل خود تبدیل گردد.

قدم ۱.۲. هر گره در شبکه گرهی با یک کمان (فعالیت) در شبکه برداری تعویض گردد، به طوری که طول هر کمان معادل است با طول زمان سپری‌شده در ایستگاه کاری که در قدم ۱ توضیح داده شد.

اگر فرض کنیم گره  $k$  در شبکه پرت‌پویا، دارای کمان‌های ورودی  $b_1, b_2, \dots, b_n$  و کمان‌های خروجی  $d_1, d_2, \dots, d_m$  باشد، در این صورت این گره در شبکه پرت کلاسیک (شبکه برداری) با کمان  $(k', k'')$  تعویض خواهد شد که  $n$  کمان به گره  $k'$  وارد شده و  $m$  کمان از گره  $k''$  خارج می‌شود.

قدم ۲.۲. شبکه بدست‌آمده در قدم ۱،۲ به یک شبکه برداری جدید با طول کمان‌های نمایی تبدیل گردد.

همان‌گونه که در قدم ۱ توضیح داده شد، اگر یک یا بی‌نهایت خدمت‌دهنده در ایستگاه کاری وجود داشته باشند، زمان سپری‌شده در ایستگاه کاری دارای توزیع نمایی به‌ترتیب با پارامترهای  $\mu_a - \lambda$  و  $\mu_a$  خواهد بود و در نتیجه کمان‌های متناظر در شبکه بدست‌آمده در قدم ۱،۲ تغییر نخواهند کرد.

اما اگر  $m_a$  خدمت‌دهنده  $(1 < m_a < \infty)$  در ایستگاه کاری  $a$  مأم استقرار یافته باشند، در این صورت کمان متناظر با دو کمان سری نمایی با پارامترهای

$(\frac{m_a \mu_a - \lambda}{\rho_a})$  و  $(\frac{m_a \mu_a}{m_a - 1})$  جایگزین می‌شود. بعد

از جایگزینی چنین کمان‌هایی با کمان‌های سری

(کمانی) می‌تواند یکی و فقط یکی از حالات فعال، غیرفعال منتظر و غیرفعال را داشته باشد که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

✓ فعال: به فعالیتی (کمانی) که در زمان  $t$  در حال اجراء شدن باشد، «فعال» گویند.

✓ غیرفعال منتظر: به فعالیتی (کمانی) که در زمان  $t$  پایان پذیرفته ولی حداقل یک کمان در  $I(\beta(a))$  هنوز پایان نیافته است، «غیرفعال منتظر» گویند. یعنی در زمان  $t$  هیچ کمان  $O(\beta(a))$  مجاز به شروع نمی‌باشد.

✓ غیرفعال: به فعالیتی (کمانی) که در زمان  $t$  نه فعال و نه غیرفعال منتظر باشد، «غیرفعال» گویند.

تعریف ۵. اگر  $Y(t)$  را به عنوان مجموعه فعالیت‌های فعال و  $Z(t)$  را به عنوان مجموعه فعالیت‌های غیرفعال منتظر در زمان  $t$  در نظر بگیریم، آنگاه  $X(t) = (Y(t), Z(t))$  حالت سیستم را نشان می‌دهد.

اگر  $(E, F)$  را یک برش دو افزایی قابل قبول تعریف کرده و نیز مجموعه تمام برش‌های دو افزایی قابل قبول سیستم را با  $S$  نشان دهیم، در این صورت مجموعه کلیه حالات سیستم برابر خواهد بود با:  $\bar{S} = S \cup \{\emptyset, \emptyset\}$ . لازم به ذکر است که  $X(t) = (\emptyset, \emptyset)$  نشان‌گر غیرفعال بودن تمام فعالیت‌ها و یا به عبارت دیگر پایان پذیرفتن پروژه در زمان  $t$  بوده و همچنین  $\{X(t), t \geq 0\}$  بیان‌گر فرآیند مارکوفی با زمان پیوسته و حالات محدود می‌باشد. حالات سیستم هم طوری شماره‌گذاری می‌شوند که ماتریس مولد حاصل از فرآیند مارکوفی، یک ماتریس بالامثلثی گردد. در نتیجه اجزاء ماتریس مولد فرآیند مارکوفی مذکور،  $Q = [q\{(E, F), (E', F')\}]$  که در آن  $(E, F), (E', F') \in \bar{S}$ ، به قرار رابطه (۷) بدست خواهند آمد:

$$q\{(E, F), (E', F')\} = \begin{cases} \gamma_a & \text{if : I} \\ \gamma_a & \text{if : II} \\ -\sum_{a \in E} \gamma_a & \text{if : III} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

$$I: a \in E, I(\beta(a)) \not\subset F \cup \{a\}, E' = E - \{a\}, F' = F \cup \{a\}$$

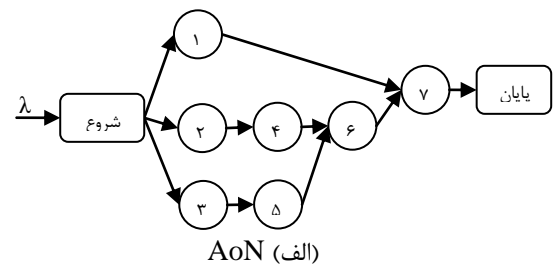
$$II: a \in E, I(\beta(a)) \subset F \cup \{a\}, E' = (E - \{a\}) \cup O(\beta(a)), F' = F - I(\beta(a))$$

$$III: a \in E, I(\beta(a)) \subset F \cup \{a\}, E' = (E - \{a\}) \cup O(\beta(a)), F' = F - I(\beta(a))$$

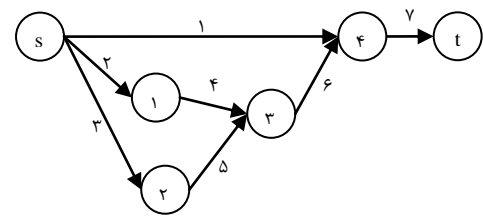
همان‌گونه که قبلاً هم ذکر شد،  $\{X(t), t \geq 0\}$  بیان‌گر فرآیند مارکوفی با زمان پیوسته و تعداد حالات محدود  $N = |\bar{S}|$

حال اگر برش  $(\bar{X}, X) = \emptyset$  باشد به آن برش، برش جهتدار یکنواخت (UDC) گفته می‌شود بدین معنی که در برش انجام‌شده، دو کمان در یک مسیر وجود ندارند.

مثال ۱. شبکه پرت‌پویای نشان‌داده شده در شکل ۱-الف را در نظر بگیرید. برش‌های جهتدار یکنواخت این مثال عبارتند از:  $(1, 2, 3)$ ،  $(1, 2, 5)$ ،  $(1, 3, 4)$ ،  $(1, 4, 5)$ ،  $(1, 6)$  و  $(7)$ ، که از شبکه پرت کلاسیک (شکل ۱-ب) به دست می‌آید.



الف) AoN



ب) AoA

شکل ۱. شبکه‌های مثال ۱

تعریف ۳. یک  $(E, F)$ ، به طوری که  $E, F \in A$ ، یک برش دو افزایی قابل قبول  $D^2$  در شبکه برداری جدید نامیده می‌شود اگر  $D = E \cup F$ ،  $E \cap F = \emptyset$  و برای هر  $a \in F$ ، داشته باشیم:  $I(\beta(a)) \not\subset F$ . یعنی اولاً: دو مجموعه  $E$  و  $F$  اجتماع‌شان برابر  $D$  بوده و اشتراکی نداشته باشند و ثانیاً: برای هر کمان متعلق به  $F$ ، در گره انتهایی این کمان، حتماً کمانی از مجموعه  $E$  هم به این گره ختم شود.

برای روشن تر شدن مطلب، مثال ۱ را دوباره در نظر بگیرید که در آن  $(1, 4, 5)$  یک UDC می‌باشد. به عنوان مثال این برش می‌تواند به  $E = \{1, 5\}$ ،  $F = \{4\}$  افزایش شود. در این حالت این برش، یک برش دو افزایی قابل قبول را تشکیل می‌دهند، چون داریم:  $F = \{4, 5\}$ ،  $E = \{1\}$ ،  $I(\beta(4)) = \{4, 5\} \not\subset F$  در این صورت این برش، دو افزایی قابل قبول نخواهد بود، زیرا:  $I(\beta(4)) = \{4, 5\} \subset F = \{4, 5\}$

تعریف ۴. در طول اجرای پروژه و در زمان  $t$ ، هر فعالیتی

<sup>1</sup> Uniformly Directed Cut (UDC)

<sup>2</sup> Admissible 2-partition

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\alpha_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\alpha_2 t} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & e^{\alpha_n t} \end{bmatrix} \quad (11)$$

### ۳. مدل تعیین موعد مقرر تحویل پروژه در شبکه‌های

#### پرت پویا با چندین خدمت‌دهنده

آذرون و همکاران [۲۳] با بهره‌گیری از مطالعه [۳۴] که بر روی تخصیص موعد مقرر کارها در محیط کارگاهی متمرکز شده، یک الگوریتم برای تعیین موعد مقرر در شبکه‌های پرت پویا ارائه نمودند. لازم به ذکر است که آنها فرض کردند که تعداد خدمت‌دهنده‌ها در هر ایستگاه کاری یک و یا بی‌نهایت می‌باشد. در این بخش پیرو مطالعه [۲۳]، یک الگوریتم جهت تعیین موعد مقرر تحویل پروژه در شبکه‌های پرت پویا با چندین خدمت‌دهنده ارائه می‌شود. بدین منظور، فرض کنید هر پروژه ورودی یک موعد مقرر  $d$  برای تحویل پروژه به کارفرما به خود اختصاص می‌دهد که از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$d = p + t_d \quad (12)$$

که در آن  $p$  زمان ورود پروژه به سیستم و  $t_d$  زمان ثابت در نظر گرفته شده برای انجام پروژه می‌باشد. در این مقاله سعی می‌شود یک زمان ثابت بهینه جهت انجام پروژه با حداقل کردن میانگین هزینه‌های هر پروژه، ارائه شود. فرض بر این است که کارفرما حاضر به منتظر ماندن تا یک زمان منطقی برای انجام پروژه می‌باشد که آنرا  $B$  می‌نامیم، به طوری که اگر زمان انجام پروژه بیشتر از مقدار  $B$  شود، مجری هزینه‌ای را متحمل خواهد شد.

$K_1$  ضریب این نوع هزینه و نیز  $K_2$  و  $K_3$ ، به ترتیب، ضریب‌های هزینه‌های تاخیر و هزینه‌های تعجیل می‌باشند. همچنین فرض کنید  $T$  زمان تکمیل پروژه باشد که در این صورت می‌توان هزینه‌های زیر را برای هر پروژه متصور شد:

۱. هزینه موعد مقرر: این هزینه در اصل پتانسیل از دست دادن بازار به علت تاخیر در تحویل پروژه‌ها در زمان معقول  $B$  به کارفرما را نشان می‌دهد که عبارتست از:

$$C_1(t_d) = \begin{cases} 0 & \text{if } t_d \leq B \\ K_1(t_d - B) & \text{if } t_d > B \end{cases} \quad (13)$$

می‌باشد که حالت شروع  $(O(s), \phi)$  و حالت پایانی (جذب‌کننده)  $(\phi, \phi)$  خواهد بود.

همچنین هنگامی که  $q\{(\phi, \phi) | (\phi, \phi)\} = 0$ ، بدین معنی است که پروژه تکمیل شده‌است. در این فرآیند مارکوفی تمام حالات به جز  $X(t) = (\phi, \phi)$  که حالت جذب‌کننده است، گذرا هستند. بدیهی است که تعداد حالات سیستم با افزایش تعداد برش‌های دو افزایی قابل قبول به طور چشم‌گیری افزایش خواهند یافت.

#### ۲-۲. تابع توزیع زمان تکمیل پروژه

اگر متغیر تصادفی  $T$  را طول بزرگترین مسیر شبکه (زمان تکمیل پروژه) و  $F(t) = P(T \leq t)$  را تابع توزیع تجمعی آن، و همچنین  $P_i(t)$  را به عنوان احتمال بودن در حالت  $N$  در زمان  $t$  بشرط بودن در حالت  $i$  در زمان صفر، در نظر بگیریم، در این صورت خواهیم داشت:

$$P_i(t) = P(X(t) = N | X(0) = i) \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (8)$$

یعنی:  $F(t) = P_i(t)$ . از طرف دیگر، با استفاده از روابط پسرو چپمن-کولموگوروف، معادلات دیفرانسیلی خطی سیستم برای بردار  $P(t) = [P_1(t) \ P_2(t) \ \dots \ P_N(t)]^T$  از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$P'(t) = \frac{dP(t)}{dt} = Q.P(t) \quad (9)$$

$$P(0) = [0 \ 0 \ \dots \ I]^T,$$

که در آن  $P'(t)$ ، مشتق بردار حالت  $P(t)$  و  $Q$  ماتریس آهنگ مولد (گذار) فرآیند تصادفی  $\{X(t), t \geq 0\}$  را نشان می‌دهد. برای حل معادله دیفرانسیلی با ضریب ثابت رابطه (۹)، فرض کنید  $M$  ماتریس مُدال<sup>۱</sup> ماتریس  $Q$  باشد، به طوری که ستون‌های آن را بردارهای ویژه ماتریس  $Q$  تشکیل می‌دهند. همچنین فرض کنید  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$  مقادیر ویژه ماتریس  $Q$  باشند که به دلیل بالامتلاشی بودن ماتریس  $Q$  مقادیر ویژه آن، عناصر قطر اصلی خواهند بود. در نتیجه، حل معادله دیفرانسیل رابطه (۹) برابر است با: (برای جزئیات بیشتر [۳۳] را مطالعه نمایید.)

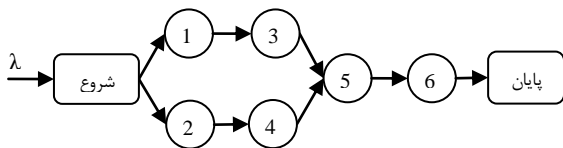
$$P(t) = M.e^{At}.M^{-1}.P(0) \quad (10)$$

که در آن  $e^{At}$  یک ماتریس قطری بوده و از رابطه زیر بدست می‌آید:

<sup>1</sup> Modal matrix

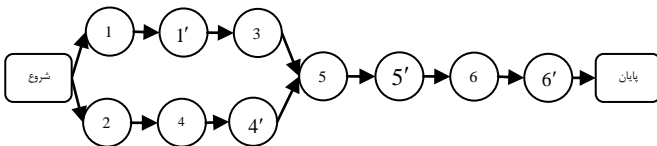
۴. مثال عددی

مثال ۲. فرض کنید در یک سازمان، پروژه‌های جدید با توزیع پواسون و با نرخ  $\lambda = 5$  پروژه در سال، وارد سیستم می‌شوند، به طوری که توزیع زمان فعالیت‌ها در همه ایستگاه‌های کاری نمایی با پارامترهای:  $\mu_1 = 3, \mu_2 = 1, \mu_3 = 12, \mu_4 = 4, \mu_5 = 2.5, \mu_6 = 3$  می‌باشد. تعداد خدمت‌دهنده‌ها، در ایستگاه‌های کاری نیز عبارتند از:  $m_1 = 4, m_2 = \infty, m_3 = 1, m_4 = 3, m_5 = 5, m_6 = 4$ . همچنین  $B = 1.5$  و ضریبهای هزینه‌ها برابرند با:  $K_1 = 10, K_2 = 35, K_3 = 12$ . شکل ۲، شبکه پرت‌پویای مسئله مذکور را به صورت یک نمودار گرهی نشان می‌دهد.



شکل ۲. شبکه پرت‌پویای گرهی مثال ۲

هدف تعیین موعدمقرر تحویل پروژه‌ها می‌باشد که بدین منظور ابتدا شبکه پرت جدید، که در شکل ۳ نشان داده شده، برای تعیین برش‌های دوافرازی قابل قبول ترسیم می‌شود.



شکل ۳. شبکه پرت جدید مثال ۲

جدول ۱ تمام برش‌های دو افزاری قابل قبول شبکه مثال ۲ را نشان می‌دهد، در حالی که فعالیت‌هایی که با نشانه \* مشخص شده اند، فعالیت‌های غیرفعال منتظر و در غیر این صورت فعالیت‌های فعال می‌باشند.

جدول ۱. همه برش‌های دو افزاری قابل قبول مثال ۲

|           |             |              |                |
|-----------|-------------|--------------|----------------|
| 1. (1,2)  | 6. (1,4')   | 11. (3*,4)   | 16. (5)        |
| 2. (1',2) | 7. (2,3*)   | 12. (3,4')   | 17. (5')       |
| 3. (1,4)  | 8. (3,4)    | 13. (1',4**) | 18. (6)        |
| 4. (2,3)  | 9. (1',4')  | 14. (3*,4')  | 19. (6')       |
| 5. (1',4) | 10. (1,4**) | 15. (3,4**)  | 20. (phi, phi) |

شکل ۳ نیز نمودار نرخ زنجیره مارکوفی مسئله مذکور را نشان می‌دهد که در آن نودها نمایان‌گر حالات سیستم (برش‌های دو افزاری قابل قبول) و کمان‌ها نشان‌دهنده نرخ گذار از یک حالت به حالت دیگر می‌باشند. همچنین داریم:  $\gamma_a = \frac{(m_a \mu_a - \lambda). m_a \mu_a}{\lambda}$

۲. هزینه تاخیر: این نوع هزینه در اثر عدم تحویل به موقع پروژه به کارفرما به وجود می‌آید که عبارتست از:

$$C_2(t, t_d) = \begin{cases} 0 & \text{if } t \leq t_d \\ K_2(t - t_d) & \text{if } t > t_d \end{cases} \quad (14)$$

۳. هزینه تعجیل: این هزینه هنگامی اتفاق می‌افتد که پروژه زودتر از موعدمقرر انجام شده و نمی‌توان پروژه را در زمان تکمیلش به کارفرما تحویل داد که هزینه‌هایی مانند نگهداری را به پروژه تحمیل خواهد کرد.

$$C_3(t, t_d) = \begin{cases} 0 & \text{if } t \geq t_d \\ K_3(t_d - t) & \text{if } t < t_d \end{cases} \quad (15)$$

در نتیجه میانگین هزینه‌های کلی با در نظر گرفتن زمان انجام پروژه  $t_d$ ، برابر است با:

$$E[C(t_d)] = K_1(t_d - B)^+ + K_2 E[(T - t_d)^+] + K_3 E[(t_d - T)^+] \quad (16)$$

در حالی که  $(a)^+ = \max(0, a)$ . الگوریتم زیر برای محاسبه زمان انجام بهینه پروژه،  $t_d^*$ ، با توجه به میانگین هزینه‌های ذکر شده ارائه می‌شود: (برای جزئیات بیشتر [۳۱] را مطالعه نمایید).

قدم ۱. معادله دیفرانسیلی (۹) را با استفاده از رابطه (۱۰) حل کرده و  $F(t)$  را بدست آورید.

قدم ۲. اگر  $K_3 = 0$ ، در این صورت به قدم ۴ رفته و در غیر این صورت به قدم ۳ بروید.

قدم ۳. اگر  $F(B) > \left( \frac{K_2}{K_2 + K_3} \right)$ ، در این صورت  $t_d^* = \bar{t}_d$  در حالی که:  $F(\bar{t}_d) = \left( \frac{K_2}{K_2 + K_3} \right)$  و در غیر این صورت به قدم ۴ بروید.

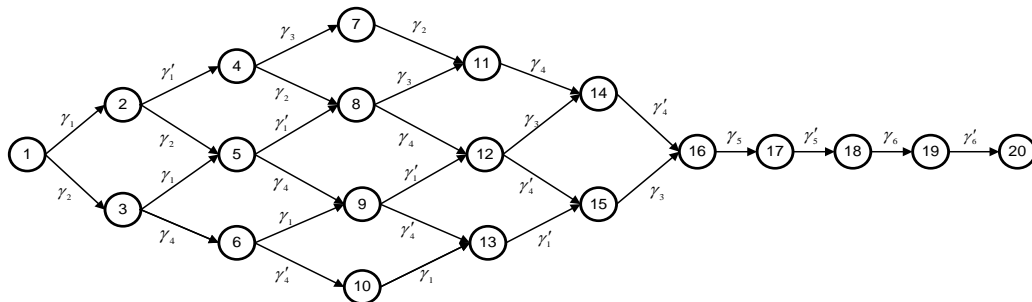
قدم ۴. اگر  $F(B) < \left( \frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_3} \right)$ ، در این صورت  $t_d^* = \bar{t}_d$  در حالی که:  $F(\bar{t}_d) = \left( \frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_3} \right)$  و در غیر این صورت  $t_d^* = B$ .

ذکر این مطلب حائز اهمیت است که در این مقاله هزینه‌ها به صورتی خطی در نظر گرفته شده‌است، در حالی که می‌توان آنها را به صورت یک تابع کلی در نظر گرفت. خوانندگان محترم برای جزئیات بیشتر می‌توانند به [۳۱] مراجعه نمایند.



لازم به‌ذکر است که عناصر قطر اصلی در هر سطر برابر با قرینه مجموع بقیه عناصر آن سطر می‌باشند.

علاوه بر موارد اشاره شده، ماتریس آهنگ مولد (گذار) نیز باید تشکیل گردد که در جدول ۲ نمایش داده شده‌است.



شکل ۳. نمودار نرخ زنجیره مارکوفی با زمان پیوسته برای مثال ۲

جدول ۲. ماتریس  $Q(\mu)$

| state | 1 | 2          | 3          | 4           | 5          | 6          | 7          | 8           | 9          | 10          | 11         | 12          | 13          | 14         | 15          | 16          | 17         | 18          | 19         | 20          |   |
|-------|---|------------|------------|-------------|------------|------------|------------|-------------|------------|-------------|------------|-------------|-------------|------------|-------------|-------------|------------|-------------|------------|-------------|---|
| 1     |   | $\gamma_1$ | $\gamma_2$ |             |            |            |            |             |            |             |            |             |             |            |             |             |            |             |            |             |   |
| 2     | 0 |            | 0          | $\gamma'_1$ | $\gamma_2$ | 0          | 0          | 0           | 0          | 0           | 0          | 0           | 0           | 0          | 0           | 0           | 0          | 0           | 0          | 0           | 0 |
| 3     | 0 | 0          |            | 0           | $\gamma_1$ | $\gamma_4$ | 0          | 0           | 0          | 0           | 0          | 0           | 0           | 0          | 0           | 0           | 0          | 0           | 0          | 0           | 0 |
| 4     | 0 | 0          | 0          |             | 0          | 0          | $\gamma_3$ | $\gamma_2$  | 0          | 0           | 0          | 0           | 0           | 0          | 0           | 0           | 0          | 0           | 0          | 0           | 0 |
| 5     | 0 | 0          | 0          | 0           |            | 0          | 0          | $\gamma'_1$ | $\gamma_4$ | 0           | 0          | 0           | 0           | 0          | 0           | 0           | 0          | 0           | 0          | 0           | 0 |
| 6     | 0 | 0          | 0          | 0           | 0          |            | 0          | 0           | $\gamma_1$ | $\gamma'_4$ | 0          | 0           | 0           | 0          | 0           | 0           | 0          | 0           | 0          | 0           | 0 |
| 7     | 0 | 0          | 0          | 0           | 0          | 0          |            | 0           | 0          | 0           | $\gamma_2$ | 0           | 0           | 0          | 0           | 0           | 0          | 0           | 0          | 0           | 0 |
| 8     | 0 | 0          | 0          | 0           | 0          | 0          | 0          |             | 0          | 0           | $\gamma_3$ | $\gamma_4$  | 0           | 0          | 0           | 0           | 0          | 0           | 0          | 0           | 0 |
| 9     | 0 | 0          | 0          | 0           | 0          | 0          | 0          | 0           |            | 0           | 0          | $\gamma'_1$ | $\gamma'_4$ | 0          | 0           | 0           | 0          | 0           | 0          | 0           | 0 |
| 10    | 0 | 0          | 0          | 0           | 0          | 0          | 0          | 0           | 0          |             | 0          | $\gamma_1$  | 0           | 0          | 0           | 0           | 0          | 0           | 0          | 0           | 0 |
| 11    | 0 | 0          | 0          | 0           | 0          | 0          | 0          | 0           | 0          | 0           |            | 0           | 0           | $\gamma_4$ | 0           | 0           | 0          | 0           | 0          | 0           | 0 |
| 12    | 0 | 0          | 0          | 0           | 0          | 0          | 0          | 0           | 0          | 0           | 0          |             | 0           | $\gamma_3$ | $\gamma'_4$ | 0           | 0          | 0           | 0          | 0           | 0 |
| 13    | 0 | 0          | 0          | 0           | 0          | 0          | 0          | 0           | 0          | 0           | 0          | 0           |             | 0          | $\gamma'_1$ | 0           | 0          | 0           | 0          | 0           | 0 |
| 14    | 0 | 0          | 0          | 0           | 0          | 0          | 0          | 0           | 0          | 0           | 0          | 0           | 0           |            | 0           | $\gamma'_4$ | 0          | 0           | 0          | 0           | 0 |
| 15    | 0 | 0          | 0          | 0           | 0          | 0          | 0          | 0           | 0          | 0           | 0          | 0           | 0           | 0          |             | $\gamma_3$  | 0          | 0           | 0          | 0           | 0 |
| 16    | 0 | 0          | 0          | 0           | 0          | 0          | 0          | 0           | 0          | 0           | 0          | 0           | 0           | 0          | 0           |             | $\gamma_5$ | 0           | 0          | 0           | 0 |
| 17    | 0 | 0          | 0          | 0           | 0          | 0          | 0          | 0           | 0          | 0           | 0          | 0           | 0           | 0          | 0           | 0           |            | $\gamma'_5$ | 0          | 0           | 0 |
| 18    | 0 | 0          | 0          | 0           | 0          | 0          | 0          | 0           | 0          | 0           | 0          | 0           | 0           | 0          | 0           | 0           | 0          |             | $\gamma_6$ | 0           | 0 |
| 19    | 0 | 0          | 0          | 0           | 0          | 0          | 0          | 0           | 0          | 0           | 0          | 0           | 0           | 0          | 0           | 0           | 0          | 0           |            | $\gamma'_6$ | 0 |
| 20    | 0 | 0          | 0          | 0           | 0          | 0          | 0          | 0           | 0          | 0           | 0          | 0           | 0           | 0          | 0           | 0           | 0          | 0           | 0          |             | 0 |

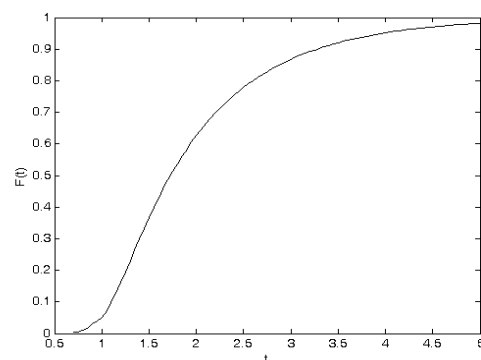
پس از تشکیل معادله دیفرانسیلی سیستم و حل آن با استفاده از رابطه (۱۰)، تابع تجمعی زمان تکمیل پروژه، که در شکل ۴ برحسب  $t$  ترسیم شده، به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$F(t) = 5.465 e^{-29t} - 18.534 e^{-5t} - 0.95 e^{-49t} - 2.559 e^{-8t} + 0.973 e^{-25t} + 1.877 e^{-34t} - 2.632 e^{-t} - 2.218 e^{-28t} + 2.267 e^{-10t} - 0.007 e^{-2t} + 0.2 e^{-13t} + 48.592 e^{-4t} + 0.922 e^{-6t} + 3.134 e^{-7t} - 0.003 e^{-37.5t} - 17.063 e^{-3.125t} + 1$$

براساس الگوریتم ارائه‌شده در بخش ۳ برای تعیین موعدمقرر تحویل پروژه چون  $K_3 \neq 0$ ، در نتیجه به قدم ۳ می‌رویم. چون داریم:  $F(1.5) = 0.333 < \left( \frac{K_2}{K_2 + K_3} \right) = 0.745$  پس به قدم ۴ می‌رویم.

همچنین، چون  $F(B) = 0.333 < \left( \frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_3} \right) = 0.532$ ، در نتیجه زمان انجام بهینه پروژه برابر است با:  $t_d^* = 1.85$ ،  $(F(1.85) = 0.537)$ .

یعنی موعدمقرر برای تحویل هر پروژه برابر خواهد بود با زمان ورود پروژه بعلاوه ۱٫۸۵ سال.



شکل ۴. نمودار  $F(t)$  برحسب  $t$

- [2] Wiest, J.D., "A Heuristic Model for Scheduling Large Projects with Limited Resources", Management Science, Vol. 13 No. 6, 1967, pp. 359-377.
- [3] Kurtulus, I.S., Davis, E.W., "Multi-Project Scheduling: Categorization of Heuristic Rules Performance", Management Science, Vol. 28, 1982, pp.161-172.
- [4] Kurtulus, I.S., Narula, S.C., "Multi-Project Scheduling: Analysis of Project Performance", IIE Transactions, Vol. 17, 1985, pp. 58-66.
- [5] Chen, V., "A 0-1 Goal Programming-Model for Scheduling Multiple Maintenance Project at a Copper Mine", European Journal of Operational Research, Vol. 6, 1994, pp.176-191.
- [6] Lova, A., Maroto, C., Tormos, P., "A Multicriteria Heuristic Method to Improve Resource Allocation in Multiproject Scheduling", European Journal of Operational Research, Vol. 127, 2000, pp.408-424.
- [7] Tsubakitani S., Deckro R.F., "A Heuristic for Multi-Project Scheduling with Limited Resources in the Housing Industry", European Journal of Operational Research, Vol. 49, 1990, pp.80- 91.
- [8] Lova, A., & Tormos, P., "Analysis of Scheduling Schemes and Heuristic Rules Performance in Resource-Constrained Multiproject Scheduling", Annals of Operations Research, Vol. 102, 2001, pp.263-286.
- [9] Kumanan, S., Jegan Jose G., Raja K., "Multi-Project Scheduling using an Heuristic and a Genetic Algorithm", The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, Vol. 31, 2006, pp.360-366.
- [10] Goncalves, J.F., Mendes, J.J.M., Resende, M.G.C., "A Genetic Algorithm for the Resource Constrained Multi-Project Scheduling Problem", European Journal of Operational Research, Vol. 189, 2008, pp.1171-1190.
- [11] Ying, Y., Shou, Y., Li, M., "Hybrid Genetic Algorithm for Resource Constrained Multi-Project Scheduling Problem", Journal of Zhejiang University (Engineering Science), Vol. 43, 2009, pp. 23-27.
- [12] Chen, P.H., Shahandashti, S. M., "Hybrid of Genetic Algorithm and Simulated Annealing for Multiple Project Scheduling with Multiple Resource Constraints", Automation in Construction, Vol. 18, 2009, pp. 434-443.
- [13] Akbari, R., Zeigham, V., Ziarati, K., "Artificial Bee Colony for Resource Constrained Project Scheduling Problem", International Journal of Industrial Engineering computations, Vol. 2, 2011, pp. 45-60.
- [14] Herroelen, W., Leus, R., "Project Scheduling under Uncertainty: Survey and Research Potentials", European Journal of Operational Research, Vol. 165, 2005, pp. 289-306.

## ۵. نتیجه‌گیری و پیشنهاد مطالعات آتی

در این نوشتار، شبکه‌های پرت‌پویا با چندین خدمت‌دهنده به صورت یک شبکه صف در نظر گرفته شده، مورد مطالعه قرار گرفت. در این مقاله، فرض شده بود که پروژه‌های ورودی کاملاً مشابه بوده و طبق فرآیند پواسون وارد سازمان می‌شوند. فعالیت‌ها به طور مستقل از هم و با توزیع نمایی در ایستگاه‌کاری متناظر خود و فقط توسط یک خدمت‌دهنده از میان چندین خدمت‌دهنده موجود با نظم FCFS، انجام می‌شوند. همچنین، هر پروژه یک هزینه جریمه‌ای برحسب زمان تکمیل واقعی پروژه و زمان انجام متعهدشده توسط مجری پروژه، به خود اختصاص می‌دهد.

در این مقاله، برای بدست آوردن زمان ثابت موعدمقرر تحویل پروژه در شبکه‌های پرت‌پویا با چندین خدمت‌دهنده، ابتدا شبکه صف به یک شبکه احتمالی تبدیل شده و با ایجاد یک مدل مارکوفی مناسب که دارای حالات محدود و زمان پیوسته می‌باشد، معادله دیفرانسیلی سیستم تشکیل گردید، که در نتیجه تابع توزیع زمان تکمیل هر پروژه بدست آمد.

تعداد حالات سیستم با افزایش تعداد برش‌های دو افزایی قابل قبول به طور چشم‌گیری افزایش خواهند یافت. در نهایت با بهره‌گیری از یک تابع جریمه خطی و حداقل کردن میانگین مجموع هزینه‌های هر پروژه، موعدمقرر برای تحویل هر پروژه تعیین گردید.

در این مقاله ظرفیت سیستم در اجرای هم‌زمان پروژه‌ها نامحدود فرض شده است که با توجه به محدود بودن اغلب سیستم‌ها و عدم امکان اجرای هم‌زمان پروژه‌ها از یک تعداد مشخصی بیشتر، نامحدود فرض کردن ظرفیت سیستم چندان واقعی به نظر نمی‌رسد.

به عنوان کار تحقیقاتی بعدی می‌توان بر روی تعیین موعدمقرر تحویل پروژه‌ها در شبکه‌های پرت‌پویا با ظرفیت محدود متمرکز شد. علاوه بر این، در دنیای واقعی معمولاً پروژه‌های ورودی به سازمان دارای انواع مختلفی می‌باشند. در نتیجه تعیین موعدمقرر تحویل پروژه برای هر کدام از انواع پروژه‌ها می‌تواند در آینده مورد مطالعه قرارگیرد و این در حالی است که در این پژوهش فرض شد که پروژه‌های ورودی کاملاً مشابه و از یک نوع می‌باشند. همچنین، تعیین موعدمقرر برای شبکه‌های گرت پویا می‌تواند موضوع جذابی برای تحقیقات بعدی باشد.

## مراجع

- [1] Pritsker, A.A.B., Watters, L.J., Wolfe, P.M., "Multiproject Scheduling with Limited Resources: A Zero-One Programming Approach", Management Science, Vol. 16, No. 1, 1969, pp. 93-108.

- [27] Adlakha, V., Kulkarni, V., "A Classified Bibliography of Research on Stochastic PERT Networks: 1966–1987", *INFOR*, Vol. 27, 1989, pp. 272–290.
- [28] Kulkarni, V., Adlakha, V., "Markov and Markov-Regenerative PERT Networks", *Operations Research*, Vol. 34, 1986, pp.769–781.
- [29] Ord, J., "A Simple Approximation to the Completion Time Distribution for a PERT Network", *Journal of Operational Research Society*, Vol. 42, 1991, pp. 1011–1017.
- [30] Soroush, H., "The Most Critical Path in a PERT Network", *Journal of Operational Research Society*, Vol. 45, 1994, pp. 287–300.
- [31] Ludwig, A., Mohring, R.H., Frederik, S., "A Computational Study on Bounding the Makespan Distribution in Stochastic Project Networks", *Annals of Operations Research*, Vol. 102, 2001, 49–64.
- [32] Abdelkader, Y. H., "Evaluating Project Completion Times when Activity Times are Weibull Distributed", *European Journal of Operational Research*, Vol. 157, 2004, pp. 704–715.
- [33] Luenberger, D., *Introduction to Dynamic Systems*, John Wiley & Sons, New York, 1979.
- [34] Seidman, A., Smith, M.L., "Due Date Assignment for Production Systems", *Management Science*, Vol. 27, 1981, pp. 571–581.
- [35] Gross, D., Harris M., *Fundamentals of Queueing Theory*. Second ed., John Wiley & Sons, New York, 1985.
- [36] Sakasegawa, H., "An Approximation Formula  $L_q = \frac{\alpha\beta^n}{(1-\rho)}$ ", *Annals of Institute for Statistical Mathematics*, Vol. 29, 1977, pp. 67-127.
- [37] Halfin, S., Whitt, W., "Heavy-Traffic Limits for Queues with Many Exponential Servers", *Operation Research*, Vol. 29, 1981, pp. 567-588
- [15] Adler, P.S., Mandelbaum, A., Nguyen, V., Scherer, E., "From Project to Process Management: an Empirically-Based Framework for Analyzing Product Development Time", *Management Science*, Vol. 41, No. 3, 1995, pp. 458–484.
- [16] Anavi-Isakow, S., Golany, B., "Managing Multi-Project Environments through Constant Work-in-Process", *International Journal of Project Management*, Vol. 21, No. 1, 2003, pp. 9–18.
- [17] Cohen, I., Golany, B., Shtub, A., "Managing Stochastic, Finite Capacity, Multi-Project Systems through the Cross Entropy Methodology", *Annals of Operations Research*, Vol. 134, 2005, pp. 183–199.
- [18] Cohen, I., Golany, B., Shtub, A., "Resource Allocation in Stochastic, Finite-Capacity, Multi-Project Systems through the Cross Entropy Methodology", *Journal of Scheduling*, Vol. 10, 2007, pp. 181–193.
- [19] Azaron, A., Modarres, M., "Project Completion Time in Dynamic PERT Networks with Generating Projects", *Scientia Iranica*, Vol. 14, No. 1, 2007, pp. 56–63.
- [20] Azaron A., Tavakkoli-Moghaddam R., "Multi-Objective Time-Cost Trade-Off in Dynamic PERT Networks using an Interactive Approach", *European Journal of Operational Research*, Vol. 180, 2007, pp. 1186–1200.
- [21] Yaghoubi, S., Noori, S., Azaron A., Tavakkoli-Moghaddam R., "Resource Allocation in Dynamic PERT Networks with Finite Capacity", *European Journal of Operational Research*, Vol. 215, 2011, pp. 670–678.
- [22] Yaghoubi, S., Noori, S., Bagherpour, M., "Resource Allocation in Multi-Server Dynamic PERT Networks using Multi Objective Programming and Markov Process", *Iranian Journal of Science & Technology*, Vol. 35 (A2), 2011, pp.131-147.
- [23] Azaron A., Fynes B., Modarres M., "Due Date Assignment in Repetitive Projects", *International Journal of Production Economics*, Vol. 129, 2011, pp. 79-85.
- [24] Charnes, A., Cooper, W., Thompson, G., "Critical Path Analysis via Chance Constrained and Stochastic Programming", *Operations Research*, Vol. 12, 1964, pp. 460–470.
- [25] Martin, J., "Distribution of the Time through a Directed Acyclic Network", *Operations Research*, Vol. 13, 1965, pp. 46–66.
- [26] Hopfinger, E., Steinhardt, V., "On the Exact Evaluation of Finite Activity Networks with Stochastic Durations of Activities", *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, vol. 117, Springer-Verlag, 1976.

**پیوست**

اگر  $m_a$  خدمت‌دهنده در ایستگاه کاری  $a$  آم وجود داشته باشد و پروژه‌های ورودی با فرآیند پواسون وارد سازمان شده و نیز توزیع زمان خدمت در ایستگاه کاری  $a$  آم نمایی باشد، در این صورت سیستم  $M/M/m_a$  بوده و تابع توزیع زمان سپری شده در سیستم (زمان انتظار صف و زمان دریافت خدمت) برابر است با [۳۵]:

$$w_a(t) = \left( \frac{\lambda - m_a \mu_a + \mu_a w_a^q(0)}{\lambda - (m_a - 1)\mu_a} \right) \mu_a e^{-\mu_a t} + \left( 1 - \frac{\lambda - m_a \mu_a + \mu_a w_a^q(0)}{\lambda - (m_a - 1)\mu_a} \right) (m_a \mu_a - \lambda) e^{-(m_a \mu_a - \lambda)t} \quad t > 0 \quad (۱-پ)$$

که در آن  $\lambda$  نرخ ورودی و  $\mu_a$  نرخ ارائه خدمت می‌باشد.  $w_a^q(0)$  احتمال طول صف صفر در ایستگاه کاری و  $P_0$  از رابطه زیر محاسبه می‌گردند:

$$w_a^q(0) = 1 - \frac{m_a \left( \frac{\lambda}{\mu_a} \right)^{m_a}}{m_a! \left( m_a - \frac{\lambda}{\mu_a} \right)} \times P_0 \quad (۲-پ)$$

$$P_0 = \left( \sum_{n=1}^{m_a-1} \frac{1}{n!} \left( \frac{\lambda}{\mu_a} \right)^n + \frac{1}{m_a!} \left( \frac{\lambda}{\mu_a} \right)^{m_a} \left( \frac{m_a \mu_a}{m_a \mu_a - \lambda} \right) \right)^{-1} \quad (۳-پ)$$

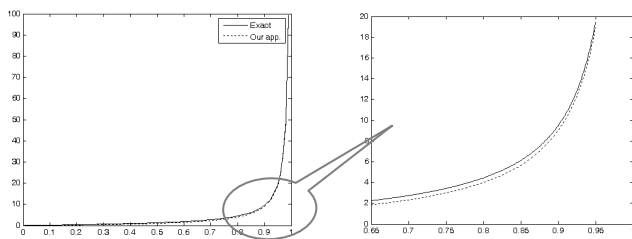
همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، بدست آوردن  $w_a(t)$  در سیستم  $M/M/m_a$  بسیار مشکل می‌باشد و اگر بتوان تقریبی برای آن ارائه کرد که نیازی به محاسبه  $w_a^q(0)$  نداشته باشد، بسیار مطلوب

خواهد بود. بدین منظور می‌توان  $w_a(t)$  را طوری بازنویسی کرد که شبیه به مجموع دو تابع توزیع نمایی باشد، یعنی داریم:

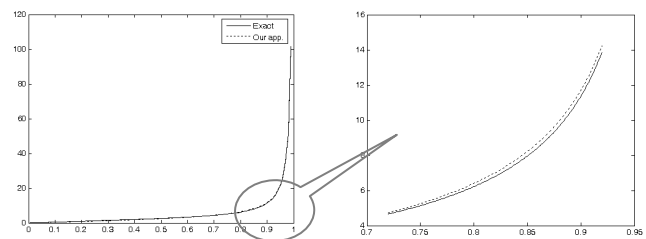
$$w_a(t) = (1 - w_a^q(0)) \left( \frac{\mu_a}{\mu_a - (m_a \mu_a - \lambda)} \right) (m_a \mu_a - \lambda) e^{-(m_a \mu_a - \lambda)t} + w_a^q(0) \left( \frac{m_a \mu_a - \lambda}{m_a \mu_a - \lambda} \right) \mu_a e^{-\mu_a t} \quad t > 0 \quad (۴-پ)$$

در صورت تقریب تابع توزیع مذکور با مجموع دو تابع توزیع نمایی، می‌توان از آن در زنجیره مارکوف بهره جست. بنابراین تابع توزیع مذکور،  $w_a(t)$ ، با مجموع دو تابع توزیع نمایی با پارامترهای  $\rho_a = \frac{\lambda}{m_a \mu_a}$  و  $\left( \frac{m_a \mu_a - \lambda}{m_a \mu_a - \lambda} \right)$  که در آن  $\left( \frac{\mu_a}{1 - (1 - \rho_a) \mu_a} = \frac{m_a \mu_a}{m_a - 1} \right)$

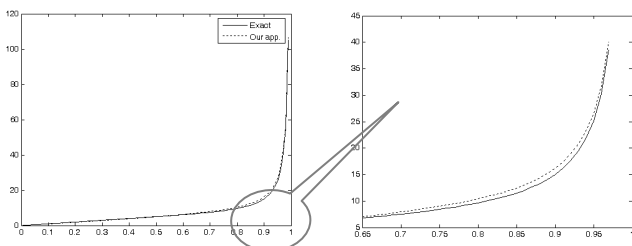
می‌باشد، تقریب زده می‌شود. این تقریب بسیار ساده بوده و نیازمند محاسبه  $w_a^q(0)$  و  $P_0$  که بسیار بغرنج و خسته‌کننده هستند نمی‌باشد، مخصوصاً هنگامی که  $m_a$  مقداری بزرگ باشد. همچنین تقریب ارائه‌شده به‌سادگی در مسائل برنامه‌ریزی ریاضی و همچنین زنجیره مارکف قابل استفاده و بکارگیری می‌باشد. هر تقریبی می‌بایست توسط معیارهایی ارزیابی گردد که در این مقاله میانگین تعداد پروژه‌ها در سیستم و همچنین تابع تجمعی زمان سپری شده در سیستم مورد بررسی قرار می‌گیرد. در شکل ۱-پ میانگین تعداد پروژه‌ها در ایستگاه کاری  $a$  آم، هنگامی که  $\rho_a$  تغییر می‌کند، به ازاء  $m_a$  های مختلف نشان داده شده‌است.



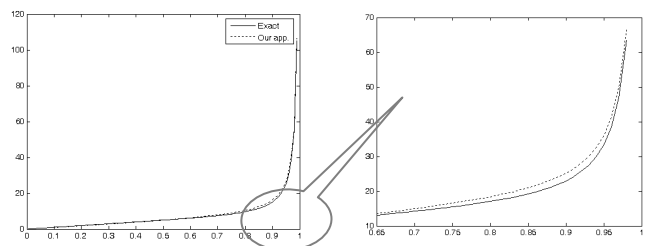
الف)  $m_a = 2$



ب)  $m_a = 5$



ج)  $m_a = 10$



د)  $m_a = 20$

شکل ۱-پ. تعداد دقیق و تقریبی میانگین تعداد پروژه‌ها در ایستگاه کاری

$$W \approx \frac{1}{\mu_a} \left( 1 + \frac{\rho_a \sqrt{2(m_a+1)} - 1}{m_a(1-\rho_a)} \right) \quad (\text{پ-۵})$$

همچنین تقریبی برای  $w_a^q(0)$  در [۳۷] ارائه شد که در نتیجه میانگین تقریبی زمان سپری شده در ایستگاه کاری  $a$ ، برابر است با:

گفتنی است که یک تقریب بسیار خوب برای میانگین طول صف در [۳۶] ارائه شده که در نتیجه میانگین تقریبی زمان سپری شده در ایستگاه کاری  $a$ ، به‌قرار ذیل می‌باشد:

جدول پ-۱. مقدار عددی دقیق و تقریبی میانگین تعداد پروژه‌ها در ایستگاه کاری

| $m_a$ | $\rho$ | $L_a$ | Our app. | Error(%) | $m_a$ | $\rho$ | $L_a$ | Our app. | Error(%) |
|-------|--------|-------|----------|----------|-------|--------|-------|----------|----------|
| 3     | 0.1    | 0.30  | 0.21     | 29.73    | 15    | 0.1    | 1.50  | 1.41     | 5.93     |
|       | 0.3    | 0.93  | 0.73     | 21.66    |       | 0.3    | 4.50  | 4.33     | 3.81     |
|       | 0.5    | 1.74  | 1.50     | 13.63    |       | 0.5    | 7.51  | 7.50     | 0.15     |
|       | 0.7    | 3.25  | 3.03     | 6.63     |       | 0.7    | 10.83 | 11.43    | 5.58     |
|       | 0.8    | 4.99  | 4.80     | 3.78     |       | 0.8    | 13.28 | 14.40    | 8.46     |
|       | 0.9    | 10.05 | 9.90     | 1.53     |       | 0.9    | 18.92 | 20.70    | 9.39     |
| 5     | 0.98   | 50.10 | 49.98    | 0.24     | 0.98  | 59.36  | 61.74 | 4.02     |          |
|       | 0.1    | 0.50  | 0.41     | 17.78    | 0.1   | 2.00   | 1.91  | 4.45     |          |
|       | 0.3    | 1.51  | 1.33     | 11.94    | 0.3   | 6.00   | 5.83  | 2.86     |          |
|       | 0.5    | 2.63  | 2.50     | 4.96     | 0.5   | 10.00  | 10.00 | 0.04     |          |
|       | 0.7    | 4.38  | 4.43     | 1.18     | 0.7   | 14.22  | 14.93 | 5.03     |          |
|       | 0.8    | 6.22  | 6.40     | 2.95     | 0.8   | 17.02  | 18.40 | 8.08     |          |
| 10    | 0.9    | 11.36 | 11.70    | 2.97     | 0.9   | 22.96  | 25.20 | 9.77     |          |
|       | 0.98   | 51.47 | 51.94    | 0.92     | 0.98  | 63.57  | 66.64 | 4.83     |          |
|       | 0.1    | 1.00  | 0.91     | 8.89     | 0.1   | 2.50   | 2.41  | 3.56     |          |
|       | 0.3    | 3.00  | 2.83     | 5.73     | 0.3   | 7.50   | 7.33  | 2.29     |          |
|       | 0.5    | 5.04  | 5.00     | 0.72     | 0.5   | 12.50  | 12.50 | 0.01     |          |
|       | 0.7    | 7.52  | 7.93     | 5.53     | 0.7   | 17.65  | 18.43 | 4.45     |          |
|       | 0.8    | 9.64  | 10.40    | 7.92     | 0.8   | 20.84  | 22.40 | 7.5      |          |
|       | 0.9    | 15.02 | 16.20    | 7.87     | 0.9   | 27.07  | 29.70 | 9.71     |          |
|       | 0.98   | 55.28 | 56.84    | 2.82     | 0.98  | 67.87  | 71.54 | 5.41     |          |

ایستگاه کاری، چندان مناسب نمی‌باشد، در نتیجه برای غلبه بر این نقصان بهتر است برای  $m_a \leq 5$  هنگامی که از این تقریب استفاده می‌شود، حتی المقدور  $\mu_a$  طوری انتخاب شود که داشته باشیم:  $0.3 < \rho_a < 1$ .

همچنین، در جدول پ-۲ حداکثر اختلاف<sup>۱</sup> ( $MD$ ) بین تابع در شکل پ-۲، تابع توزیع تجمعی دقیق و نیز تقریبی برای  $m_a = 5$  و  $m_a = 10$  با در نظر گرفتن ضریب بهره‌وری‌های مختلف نشان داده شده‌است. توزیع تجمعی دقیق و تقریبی برحسب تعداد خدمت‌دهنده‌ها و نیز ضریب بهره‌وری‌های مختلف ارائه شده‌است.

بررسی موارد ذکر شده نشان می‌دهد که تقریب ارائه شده مناسب بوده و می‌توان چنین نتیجه گرفت که اگر  $m_a$  خدمت‌دهنده  $(1 < m_a < \infty)$  در ایستگاه کاری  $a$  استقرار یافته باشد، در این صورت سیستم  $M/M/m_a$  بوده و تابع توزیع زمان صرف‌شده در سیستم، به‌طور تقریبی برابر است با دو توزیع نمایی سری با پارامترهای  $(\frac{m_a \mu_a}{m_a - 1})$ ، در حالی که  $\rho_a = \frac{\lambda}{m_a \mu_a}$ . بنابراین تابع توزیع زمان صرف‌شده در ایستگاه کاری  $a$ ، به‌طور تقریبی برابر خواهد بود با:

$$W \approx \frac{1}{\mu_a} \left( 1 + \frac{1}{m_a(1-\rho_a) \left( 1 + \sqrt{2\pi} \beta \cdot \Phi(\beta) \cdot e^{\beta^2/2} \right)} \right) \quad (\text{پ-۶})$$

که در آن  $\beta = (1-\rho_a) \sqrt{m_a}$  و  $\Phi(t)$  تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد با میانگین صفر و واریانس یک می‌باشد. از سوی دیگر تقریب ارائه شده در این تحقیق برای میانگین زمان سپری شده در ایستگاه کاری  $a$ ، برابر است با:

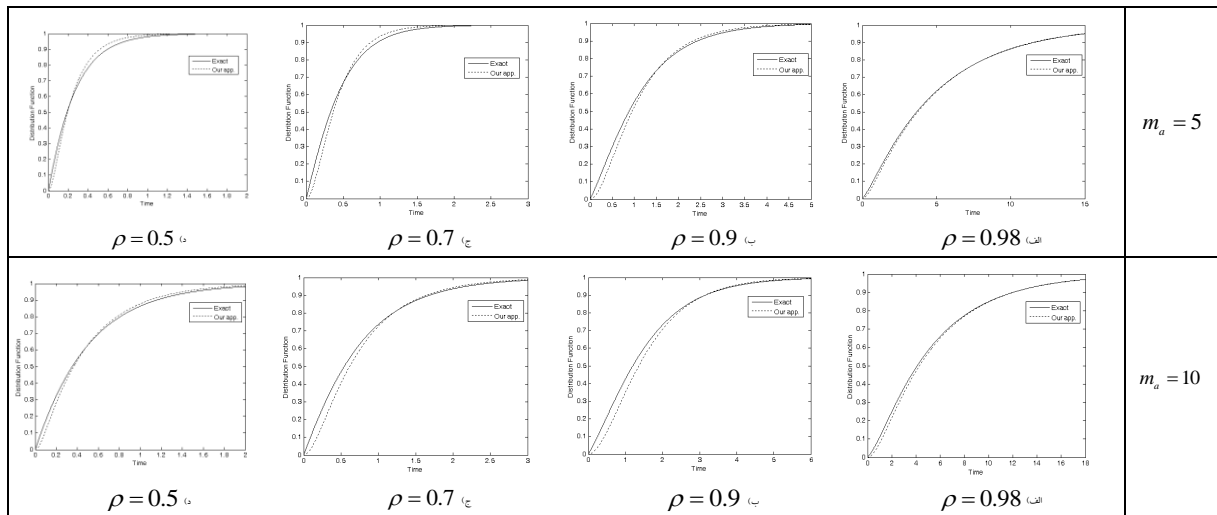
$$W \approx \left( \frac{\rho_a}{m_a \mu_a - \lambda} \right) + \left( \frac{m_a - 1}{m_a \mu_a} \right) \quad (\text{پ-۷})$$

بدیهی است که، تقریب ارائه شده بسیار ساده بوده و اجزایش به‌راحتی و بدون محاسبات بغرنج قابل کنترل می‌باشند و یا به‌عبارت دیگر پیچیدگی تقریب ارائه شده نسبت به تقریب‌های موجود در ادبیات موضوع، کمتر می‌باشد. علاوه بر این همان‌گونه که قبلاً هم ذکر گردید، تقریب ارائه شده به‌سادگی در مسائل برنامه‌ریزی ریاضی و همچنین زنجیره مارکف قابل استفاده و بکارگیری می‌باشد. در جدول پ-۱، میانگین تعداد پروژه‌ها در ایستگاه کاری،  $L_a$ ، به‌صورت دقیق و براساس تقریب ارائه شده به‌ازاء  $m_a$ ‌ها و نیز  $\rho_a$ ‌های مختلف، ارائه شده و همچنین درصد خطای موجود محاسبه گردیده است. هنگامی که  $m_a \leq 5$  و  $\rho_a \leq 0.3$  تقریب ارائه شده برای میانگین تعداد پروژه‌ها در

<sup>۱</sup> Maximum Difference (MD)

لازم به ذکر است که اگر تعداد یک و یا بی‌نهایت خدمت‌دهنده در ایستگاه کاری  $a$  م وجود داشته باشد، در این صورت زمان صرف‌شده در سیستم دارای تابع توزیع نمایی به ترتیب، با پارامترهای  $(\mu_a - \lambda)$  و  $\mu_a$  خواهد بود.

$$w_a(t) \approx \left( \frac{\frac{m_a \mu_a}{m_a - 1}}{\left( \frac{m_a \mu_a}{m_a - 1} \right) - \left( \frac{m_a \mu_a - \lambda}{\rho_a} \right)} \right) \left( \frac{m_a \mu_a - \lambda}{\rho_a} \right) e^{-\left( \frac{m_a \mu_a - \lambda}{\rho_a} \right) t} - \left( \frac{\frac{m_a \mu_a - \lambda}{\rho_a}}{\left( \frac{m_a \mu_a}{m_a - 1} \right) - \left( \frac{m_a \mu_a - \lambda}{\rho_a} \right)} \right) \left( \frac{m_a \mu_a}{m_a - 1} \right) e^{-\left( \frac{m_a \mu_a}{m_a - 1} \right) t} \quad t > 0 \quad (\text{پ-۸})$$



شکل پ-۲. تابع توزیع تجمعی زمان سپری شده در ایستگاه کاری

جدول پ-۲. حداکثر اختلاف بین تابع توزیع تجمعی دقیق و تقریبی

| $m_a$ | $\rho_a$ | MD    | $m_a$ | $\rho_a$ | MD    | $m_a$ | $\rho_a$ | MD    | $m_a$ | $\rho_a$ | MD    |
|-------|----------|-------|-------|----------|-------|-------|----------|-------|-------|----------|-------|
| 3     | 0.1      | 0.132 | 10    | 0.1      | 0.034 | 20    | 0.1      | 0.016 | 30    | 0.1      | 0.011 |
|       | 0.3      | 0.105 |       | 0.3      | 0.030 |       | 0.3      | 0.017 |       |          |       |
|       | 0.5      | 0.082 |       | 0.5      | 0.061 |       | 0.5      | 0.038 |       |          |       |
|       | 0.7      | 0.087 |       | 0.7      | 0.093 |       | 0.7      | 0.070 |       |          |       |
|       | 0.8      | 0.079 |       | 0.8      | 0.099 |       | 0.8      | 0.086 |       |          |       |
|       | 0.9      | 0.055 |       | 0.9      | 0.087 |       | 0.9      | 0.088 |       |          |       |
| 5     | 0.98     | 0.016 | 15    | 0.98     | 0.035 | 25    | 0.98     | 0.045 | 50    | 0.98     | 0.049 |
|       | 0.1      | 0.073 |       | 0.1      | 0.022 |       | 0.1      | 0.013 |       |          |       |
|       | 0.3      | 0.054 |       | 0.3      | 0.021 |       | 0.3      | 0.014 |       |          |       |
|       | 0.5      | 0.080 |       | 0.5      | 0.047 |       | 0.5      | 0.031 |       |          |       |
|       | 0.7      | 0.099 |       | 0.7      | 0.081 |       | 0.7      | 0.062 |       |          |       |
|       | 0.8      | ---   |       | 0.8      | 0.093 |       | 0.8      | 0.079 |       |          |       |
|       | 0.9      | 0.073 | 0.9   | 0.089    | 0.9   | 0.086 | 0.9      | 0.072 |       | 0.9      | 0.072 |
|       | 0.98     | 0.024 | 0.98  | 0.041    | 0.98  | 0.048 | 0.98     | 0.052 |       | 0.98     | 0.052 |