



# Monitoring Non-linear Profiles Using Wavelets

Rassoul Noorossana\* & Mehrdad Nikoo

*Rassoul Noorossana, Iran University of Science and Technology*

*Mehrdad Nikoo, Department of Industrial Engineering-Islamic Azad University Research and Science Branch Tehran*

## Keywords

Nonlinear Profiles,  
Discrete Wavelet  
Transform,  
Decomposition Level,  
Coefficient of  
Determination,  
Quality Control

## ABSTRACT

*In many industrial processes, quality of a process is characterized with nonlinear relation between response variable and explanatory variables. In this article, wavelets are used for monitoring nonlinear profiles in phase II. A method is proposed to determine decomposition level based on adjusted coefficient determination and mean of profile are monitored in that level. Variation within profiles are estimated with a statistics were proposed in wavelet literature. The performance of proposed methods in phase II are shown under shift in mean of profiles in terms of average run length (ARL) criterion.*

© 2016 IUST Publication, IJIEPM Vol. 27, No. 4, All Rights Reserved



## پایش پروفایل های غیر خطی با استفاده از موجک ها

رسول نورالسنا\* و مهرداد نیکو

### چکیده:

در بسیاری از فرآیندهای تولیدی کیفیت یک محصول به وسیله رابطه غیر خطی بین متغیر پاسخ (ویژگی کیفیتی) و متغیر مستقل بیان می شود. در این مقاله از تبدیل موجک ها برای پایش پروفایل های غیر خطی در فاز II استفاده شده است. در تبدیل موجک ها سطح تجزیه شکل تابع رگرسیون را مشخص می کند. در ابتدا با استفاده از ضریب تعیین تعدیل شده سطح تجزیه مشخص شده و سپس در سطح تجزیه تعیین شده میانگین پروفایل براساس ضرایب موجک پایش شده است. از آماره پیشنهادی در ادبیات رگرسیون ناپارامتریک با موجک ها برای تخمین تغییر پذیری درون پروفایل استفاده شده است. عملکرد نمودار کنترل پیشنهادی براساس معیار متوسط طول دنباله (ARL) برای داده های واقعی در فاز II ارائه شده است.

### کلمات کلیدی

پروفایل غیر خطی،  
تبدیل گسسته موجک ها،  
سطح تجزیه،  
ضریب تعیین، کنترل کیفیت

### ۱. مقدمه

در تولید بسیاری از محصولات، کیفیت یک محصول براساس ویژگی کیفیتی محصول در زمان یا مکان های مختلف تعریف می گردد. از رابطه بین متغیر پاسخ (بیان کننده ویژگی کیفیتی) و متغیر(های) مستقل برای پایش اینگونه محصولات استفاده می شود که پروفایل نامیده می شود. پروفایل ها در کاربردهای عملی به صورت خطی (ساده و چند گانه)، چند جمله ای و غیر خطی مشاهده شده است. پایش پروفایل ها در فازهای I و II انجام می شود. در فاز I هدف شناسایی پایداری فرآیند و تخمین پارامترهای نامعلوم فرآیند است در صورتیکه در فاز II هدف شناسایی تغییر در پارامترهای فرآیند در کوتاهترین زمان است. طی سالهای اخیر روشهای متعددی توسط محققان برای پایش انواع پروفایل ها در فازهای I و II ارائه شده است. کنگ و آلباین [۱] نمودار کنترل چند متغیره  $T^2$  براساس پارامترهای رگرسیون و نمودار EWMA/R برای پایش میانگین و واریانس پایش پروفایل های خطی ساده در فاز II را پیشنهاد دادند. همچنین کیم

و همکاران [۲] ابتدا با استفاده از کد نمودن متغیر مستقل پارامترهای رگرسیون را از هم مستقل نموده و از ۳ نمودار کنترل مستقل EWMA برای پایش عرض از مبدا، شیب و واریانس استفاده نمودند. محمود و وودال [۳] برای پایش میانگین فرآیند از رگرسیون براساس متغیرهای مجازی<sup>۱</sup> پس از ادغام مشاهدات تمامی نمونه ها استفاده کردند و برای پایش واریانس نیز آماره F را پیشنهاد دادند. همچنین روش هایی برای پایش فرآیند در صورت همبستگی بین جزء اخلال توسط نورالسنا و همکاران [۴] ارائه گردید. روش هایی برای پایش پروفایل های خطی چند گانه، پروفایل های چند جمله ای و پروفایل های چند متغیره ساده و چند متغیره در فاز های I و II توسط محمود [۵]، کاظم زاده و همکاران [۶]، نورالسنا و همکاران [۷] ارائه گردید.

واکر و رایت [۸]، ویلیامز و همکاران [۹]، مثال های واقعی از رابطه غیر خطی بین متغیر پاسخ (متغیر کیفیت) و متغیر مستقل ارائه نمودند. ویلیامز و همکاران [۹] استفاده از نمودار کنترل  $T^2$  براساس پارامترهای تخمین زده شده در رگرسیون غیر خطی را در فاز I پیشنهاد دادند. آنها کارایی نمودار کنترل چند متغیره  $T^2$  را براساس سه روش تخمین ماتریس واریانس - کوواریانس، با هم مقایسه نموده اند. جنسن و بریج [۱۰] استفاده از مدل های آمیخته غیر خطی<sup>۲</sup> برای پایش پروفایل های غیر خطی در حالت همبستگی بین باقیمانده های درون پروفایل را پیشنهاد دادند.

تاریخ وصول: ۹۰/۰۳/۰۵

تاریخ تصویب: ۹۱/۰۶/۱۵

مهرداد نیکو، دانش آموخته دکتری مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران  
M332nikoo@yahoo.com

\*نویسنده مسئول مقاله: دکتر رسول نورالسنا، استاد دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران  
Rassoul@iust.ac.ir

فرونی<sup>۱۴</sup> پیشنهاد دادند که امکان پایش شیفت در میانگین فرآیند را فراهم می آورد. مقیاس انتخاب شده برای موجک براساس اطلاعات قبلی از انتقال هایی که در بزرگی سیگنال رخ میدهد انتخاب میگردد. چیکر و همکاران [۱۶] استفاده از رگرسیون نیمه پارامتریک<sup>۱۵</sup> براساس توابع موجک را برای شناسایی تغییر در دنباله ای از پروفایل ها پیشنهاد نمودند. پی نبر و جین [۱۷] از مدل های با اثر تصادفی<sup>۱۶</sup> براساس تبدیل موجک ها برای پایش همزمان تغییرات درون و بین پروفایل ها استفاده کردند.

در هموار سازی با استفاده از تبدیل موجک ها از دو مفهوم نوفه زدایی<sup>۱۷</sup> و فشرده سازی<sup>۱۸</sup> و دو پارامتر هموار سازی آستانه<sup>۱۹</sup> و سطح تجزیه<sup>۲۰</sup> استفاده می شود. نوفه زدایی حذف جملات اخلال تصادفی از مشاهدات است، در صورتیکه فشرده سازی کاهش ابعاد داده ها است به نحوی که اطلاعات اصلی پروفایل حذف نشود. تعیین پارامترهای آستانه و سطح تجزیه (مقیاس)، شکل تابع رگرسیون رامشخص می نماید.

با افزایش سطح تجزیه تعداد پارامترهایی که در تقریب منحنی از آن ها استفاده می شود کاهش یافته و در نتیجه نیکویی برازش<sup>۲۱</sup> کاهش می یابد. به عبارت دیگر سطح تجزیه، شکل تابع رگرسیون و در نتیجه تعداد پارامترها را مشخص می کند که بر توان آزمون آماره  $T^2$  موثر است، بنابراین در پایش پروفایل لازم است سطح تجزیه ای انتخاب شود که ضمن در برداشتن کمترین ضرایب، بیشترین شباهت را به منحنی داشته باشد.

در این مقاله برای پایش تغییر پذیری در میانگین پروفایل از آماره چند متغیره  $T^2$  براساس ضرایب توابع مقیاس موجک و برای پایش تغییر پذیری درون پروفایل<sup>۲۲</sup> یک نمودار کنترل براساس ضرایب موجک ارائه شده است. برای تشریح روش انتخاب مقیاس و کارایی نمودارهای کنترل پیشنهادی پایش میانگین و واریانس از داده های چگالی عمودی تخته های نئوپان (VDP<sup>۲۳</sup>) واکر و رایت [۸] استفاده شده است.

قسمت های بعدی این مقاله بدین ترتیب می باشد، در بخش دوم به صورت اجمالی به معرفی تبدیل گسسته موجک ها، پارامترهای هموار سازی آستانه و سطح تجزیه و همچنین برآوردهای واریانس در تبدیل موجکها پرداخته می شود. در بخش سوم چگونگی تعیین سطح تجزیه معرفی می گردد. بخش چهارم به آماره پایش تغییر پذیری (واریانس) درون پروفایل و همچنین آماره های پایش تغییرات در میانگین فرآیند اختصاص یافته است. در بخش پنجم روش های موجود پایش پروفایل های غیر خطی در فاز II معرفی شده اند. در بخش ششم با استفاده از داده های VDP کارایی روش پیشنهادی پایش میانگین پروفایل های غیر خطی ارائه شده است. در بخش هفتم نتیجه گیری و پیشنهاداتی برای مطالعات آتی در پایش پروفایل های غیر خطی با استفاده از تبدیل موجک ها ارائه می گردد.

واقفی و همکاران [۱۱] دو روش پارامتریک و ناپارامتریک را برای پایش پروفایل های غیر خطی در فاز II توسعه دادند.

نمودارهای کنترل براساس پارامترهای رگرسیون غیر خطی با دو مشکل مواجه هستند، اول اینکه توزیع پارامترهای رگرسیون در نمونه های کوچک (حتی در صورت نرمال بودن مشاهدات) مشخص نیست (و به صورت مجانبی نرمال است) و با افزایش پیچیدگی فرآیند و رفتار غیر ایستا<sup>۲</sup> تعداد پارامترهای رگرسیون افزایش می یابد که موجب کاهش توان آزمون نمودارهای کنترل چند متغیره می گردد. با توجه به کاستیهای رگرسیون غیر خطی در پایش پروفایل های غیر خطی محققین متعددی از رگرسیون ناپارامتریک برای مدل سازی و تخمین پارامترها استفاده نمودند.

در رگرسیون پارامتریک (خطی و غیر خطی) شکل تابع رگرسیون از پیش معین است و هدف از آن، تخمین با حداقل پارامتر است به عبارت دیگر فقط وقتی یک پارامتر (یک متغیر) به مدل افزوده می شود که موجب کاهش حداقل مربعات خطاء<sup>۴</sup> شود. در رگرسیون ناپارامتریک یا هموار سازی<sup>۵</sup> شکل تابع رگرسیون از پیش معین نبوده و تابعی به عنوان تابع رگرسیون انتخاب می گردد که بسته به کاربرد مورد نظر حد مطلوبی از همواری را داشته باشد. بنا براین آنچه موجب تفاوت این دو رویکرد می شود، اینستکه در رگرسیون ناپارامتریک هدف تخمین مدل با حداقل پارامترها نیست. از توابعی شناخته شده با خاصیتهای معین (مانند مشتق پذیری) به عنوان توابع پایه استفاده می شود که کاربرد ترین آنها عبارتند از توابع فوریه، اسپلاین ها، موجک ها و کرنل.

با توجه به قابلیت های توابع پایه موجک در مدل سازی فرآیندهای غیر ایستا و دارای تغییرات تیز<sup>۶</sup> محققان متعددی به استفاده از تبدیل گسسته موجک ها<sup>۷</sup> (و رگرسیون ناپارامتریک) در پایش پروفایل های غیر خطی پرداختند. جن وشی [۱۲] با استفاده از مفهوم آستانه عام<sup>۸</sup> ابعاد پروفایل را کاهش داده و استفاده از آماره چند متغیره  $T^2$  براساس ضرایب موجک بزرگتر از آستانه را در پایش فاز II فرآیند پیشنهاد نمودند. لادا و همکاران [۱۳] از حداقل نمودن معیار  $AIC^9$  برای تعیین سطح تجزیه تبدیل موجک ها استفاده نموده و از ضرایب تبدیل موجک این سطح به عنوان متغیرهای آماره  $T^2$  استفاده نمودند. جونگ و لو [۱۴] با توجه به ناکارآمدی رگرسیون پارامتریک در کشف شیفت های موضعی<sup>۱۰</sup> آستانه جدیدی را که برای هر پروفایل در فاز II به هنگام می گردد، پیشنهاد دادند و کارآمدی نمودار کنترل طراحی شده (براساس ضرایب موجک بزرگتر از این آستانه) را با استفاده از معیار  $ARL^{11}$  با نمودارهای کنترل پیشنهادی قبلی مقایسه نمودند. زو و همکاران [۱۵] از ترکیب تبدیل موجک ها<sup>۱۲</sup> و کنترل فرآیند آماری برای پایش سیگنال های موجی<sup>۱۳</sup> استفاده نمودند. آن ها برای هر ضریب موجک یک نمودار کنترل براساس حدود بون

## ۲. تبدیل موجک ها

موجک ها خانواده ای از توابع پایه هستند ، که از قابلیت بیشتری در مدل سازی سازی توابع با رفتار پیچیده و تغییرات تیز نسبت به توابع پایه دیگر مانند فوریه و اسپلاین ها برخوردار هستند. عنصر اصلی ساختار موجک ها ، توابع مقیاس<sup>۲۴</sup>  $\phi(x)$  است .

$$\phi_{jk} = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j x - k) \quad (۱)$$

رابطه (۱) نسخه انتقال<sup>۲۵</sup> یافته  $\mathbf{k}$  و اتساع یافته<sup>۲۶</sup> (تغییر

$$\psi_{jk} = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k) \quad (۲)$$

مقیاس)  $\mathbf{j}$  تابع  $\phi(x)$  است. تابع  $\phi_{jk}$  ساخته می شود. اگر  $f(t) \in L^2$  باشد ، براساس تابع  $\phi_{jk}$  ساخته می شود. اگر  $f(t) \in L^2$  باشد ،

راه صورت ذیل براساس توابع پایه موجک می توان

نوشت: [18]

$$y = \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} c_{j_0 k} \phi_{j_0 k} + \sum_{j=j_0+1}^{J-1} \sum_{k=1}^{2^j-1} d_{j k} \psi_{j k} \quad (۲)$$

ضرایب  $c_{j_0 k}$  تغییرات با فرکانس کم ( تغییرات در مقیاس

بزرگ ) و  $d_{j k}$  تغییرات با فرکانس بالا ( تغییرات در مقیاس

کوچک ) را نشان می دهد. از ویژگیهای مهم تبدیل موجکها

امکان توسیع توابع با تغییر مقیاس ( $J_0$ ) است .  $J_0$  سطح تجزیه در تبدیل موجکها است و تجزیه کامل ( کوچکترین مقیاس ) براساس رابطه (۳) در الگوریتم هرمی<sup>۲۸</sup> تعیین می گردد.

$$2^J = n \quad (۳)$$

## ۲-۱. کاهش ابعاد در تبدیل موجکها

هر مشاهده  $y_i$  در پروفایل از دو جزء غیر تصادفی  $f(x_i)$  و

جزء تصادفی  $\mathcal{E}_i$  به صورت  $y_i = f(x_i) + \mathcal{E}_i$  تشکیل می گردد.

فرض می شود جزء تصادفی دارای توزیع گاوسی و iid<sup>۲۹</sup> است .

برای کاهش ابعاد داده ها از دو مفهوم فشرده سازی<sup>۳۰</sup> و نوفه زدایی<sup>۳۱</sup> استفاده می شود . در فشرده سازی هدف کاهش ابعاد

داده ها است به نحوی که اطلاعات اصلی منحنی حذف نگردد.

در نوفه زدایی هدف شناسایی سیگنال اصلی از مشاهدات دارای نوفه است ، بنابراین آن دسته از ضرایب موجک که تغییرات

کوچک را مدل می کنند ( که غالباً ضرایب  $d_{j k}$  هستند) از مدل

کنار گذاشته می شوند. در هر دو مرحله فشرده سازی و نوفه زدایی انتخاب آستانه ای که ضرایب کوچکتر از آن را بتوان حذف

نمود ، نکته ای اساسی در کاهش ابعاد داده ها است . در هر دو

روش آستانه بر روی ضرایب  $d_{j k}$  در رابطه (۲) عمل نموده

( $j \geq j_0$ ) و تاثیری بر ضرایب  $c_{j_0 k}$  ندارد . بنابراین پیش از

اعمال آستانه بر روی ضرایب تبدیل موجک، می بایست مقیاس مناسب را از بین اعداد  $j = 0, 1, 2, 3, \dots, J-1$  در رابطه (۲) انتخاب نمود . در مقیاس های متفاوت در یک آستانه مشخص تعداد ضرایبی که حذف می گردند متفاوت می باشد. دو روش تابع آستانه سخت<sup>۳۲</sup> و تابع آستانه نرم<sup>۳۳</sup> برای اعمال آستانه بر ضرایب تبدیل موجک تعریف شده است. در ادبیات موضوع آستانه های متعددی برای کاهش ابعاد داده ها معرفی شده اند.

$$\lambda = \hat{\sigma} \sqrt{2 \log n} \quad (۴)$$

رابطه (۴) به علت خواص جالب و سادگی ، پر کاربردترین آستانه در ادبیات موجک ها است و آستانه عام<sup>۳۴</sup> نامیده می شود. به علت اینکه با افزایش حجم داده هادر هر منحنی ، این آستانه موجب کاهش MSE می شود در رگرسیون ناپارامتریک بیشتر مورد استفاده قرار گرفته است .

## ۲-۲. تخمین واریانس در رگرسیون ناپارامتریک با استفاده از موجک ها

در رگرسیون پارامتریک ( خطی ، چند جمله ای و غیر خطی ) از نسبت مجموع مربعات خطاء باقیماندهای رگرسیون به درجه

آزادی  $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n-k}$  (به عنوان برآوردگر واریانس استفاده می

شود . در رگرسیون ناپارامتریک با استفاده از توابع پایه موجک برای برآورد انحراف معیار و واریانس مشاهدات دو برآوردگر روابط (۵) و (۶) معرفی شده است. [۱۹] که در روابط فوق  $d_{J-1, k}$

ضرایب تبدیل موجک در کوچکترین مقیاس در آنالیز چند ریزه ساز<sup>۳۵</sup> در رابطه (۲) است. رابطه (۵) برآوردگر  $MAD^{۳۶}$  نامیده

می شود. برآوردگر انحراف معیار در رابطه (۵) برآوردگری

استوار<sup>۳۷</sup> نسبت به مقیاس است.

$$\hat{\sigma} = \frac{\text{median} |d_{J-1, k}|}{.6745} \quad (۵)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{k=1}^{n/2} (d_{J-1, k} - \bar{d}_{J-1})^2}{(\frac{n}{2} - 1)} \quad (۶)$$

## ۳. تعیین سطح تجزیه در DWT

براساس الگوریتم هرمی ، در مقیاس  $j$ ام، داده ها براساس رابطه

(۲)، به دو مجموعه  $c_{j k}$  و  $d_{j k}$  تصویر می گردد که تعداد

ضرایب بیان کننده سیگنال در سطح  $j$  ( $c_{j k}$ ) نصف سطح  $j+1$

است . بنابراین با بزرگتر شدن مقیاس ( کاهش  $j$ ) ابعاد ضرایب

تقریب موجک بیان کننده سیگنال به سرعت کاهش می یابد و

در مقیاس های مختلف  $j$  در رابطه (۲) توابع رگرسیون متفاوتی

تعریف می گردد . به بیان دیگر تعیین سطح تجزیه در تبدیل

$$T_l^2 = (Z_l - \bar{Z})' \Sigma^{-1} (Z_l - \bar{Z}) \quad (10)$$

$$Z_l = [c_{jk}] \quad k = 0, 1, \dots, 2^j - 1 \quad (11)$$

که در رابطه (۱۰) آماره پایش میانگین،  $Z_l$  بردار  $k \times 1$  ضرایب تقریب موجک پروفایل  $\mathbf{I}$  ام و  $\bar{Z}$  بردار میانگین پارامترهای ضرایب تقریب موجک است. در رابطه (۱۱)  $\mathbf{j}$  سطح تجزیه (مقیاس) می باشد.

بر اساس روش محاسبه ماتریس  $\Sigma$ ، آماره های متفاوت  $T_l^2$  بدست می آید. از ماتریس کوواریانس نمونه<sup>۴۴</sup> بر مبنای رابطه (۱۲) در آماره چند متغیره  $T^2$  استفاده شده است.

$$\Sigma = \frac{1}{m-1} \sum_{p=1}^m (c_{jp} - \bar{c}_j)(c_{jp} - \bar{c}_j)' \quad (12)$$

در رابطه (۱۲)  $m$  تعداد پروفایل ها،  $c_{jp}$  و  $\bar{c}_j$  به ترتیب بردار ضرایب تبدیل موجک پروفایل  $p$  ام و برآورد پارامترهای جامعه هستند.

#### ۴-۲. پایش واریانس درون پروفایل

از آماره رابطه (۶) برای تخمین انحراف معیار استفاده شده است. رابطه (۶) تخمینی از انحراف معیار درون مشاهدات (جزء خطا) بر اساس انحراف معیار ضرایب تبدیل موجک ( $d_{J-1,k}$ ) در پایین ترین سطح تجزیه یا کوچکترین مقیاس در آنالیز چند ریزه ساز (سطح تجزیه اول) ارائه می کند.

بنابه رابطه (۹) در صورت نرمال بودن مشاهدات، ضرایب  $d_{jk}$  نرمال می باشند. ضرایب  $d_{jk}$  در فاز  $\mathbf{I}$  از پروفایل های تحت کنترل بدست آمده و از یک جامعه نرمال می باشند. بنابراین تفاوت های  $\sigma_L^2$  (تخمین واریانس در پروفایل  $\mathbf{I}$  ام) مربوط به عوامل تصادفی بوده و تخمین ناراییی از واریانس مشترک<sup>۴۵</sup> با استفاده از ادغام داده های<sup>۴۶</sup> (ضرایب  $d_{jk}$ )،  $m$  پروفایل بدست می آید.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} (d_{ljk} - \bar{d}_{ljk})^2}{N - m} \quad (13)$$

در رابطه (۱۳)،  $m$  تعداد پروفایل های تحت کنترل،  $\mathbf{j}$  مقیاس تجزیه، اندیس  $\mathbf{k}$  بیانگر ضریب تبدیل موجک و  $\mathbf{n}$  تعداد مشاهدات پروفایل و  $N = m \left( \frac{n}{2} \right)$  است.

$$\chi_l^2 = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \left( \frac{d_{l,J-1,k} - \bar{d}_{J-1,k}}{\sigma} \right)^2 \quad (14)$$

موجک ها متناظر با مشخص نمایی مدل<sup>۳۸</sup> در رگرسیون پارامتریک است. یکی از معیارهای متداول برای تعیین نیکویی برازش تابع رگرسیون ضریب تعیین<sup>۳۹</sup> می باشد. ضریب تعیین ( $R^2$ ) معیاری است که نشان می دهد، چقدر تابع رگرسیون به داده ها به خوبی برازش شده است. مجموع مربعات کل تغییرات حول میانگین مشاهدات متغیر وابسته ( $TSS^{(*)}$ ) را می توان به صورت مجموع مربعات ناشی از متغیرهای توضیحی رگرسیون ( $ESS^{(*)}$ ) و مجموع مربعات باقیمانده ( $RSS^{(*)}$ ) تفکیک نمود (رابطه ۷).

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (7)$$

ضریب تعیین در رگرسیون دو متغیره ( $R^2$ ) از تقسیم  $ESS$  بر  $TSS$  بدست می آید. ضریب تعیین با افزایش تعداد متغیرهای توضیحی کاهش نمی یابد، لذا از ضریب تعیین تعدیل<sup>۴۳</sup> شده در رابطه (۸) برای مقایسه نیکویی برازش توابع رگرسیون با تعداد متفاوت متغیرهای مستقل استفاده می شود.

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{(n-1)}{n-k} (1 - R^2) \quad (8)$$

در رابطه (۸)،  $\mathbf{n}$  تعداد مشاهدات و  $\mathbf{k}$  تعداد پارامترها (تعداد متغیرها و عرض از مبداء) می باشد.

تعداد توابع مقیاس و در نتیجه تعداد ضرایب  $C_{j_0k}$  با افزایش سطح تجزیه کاهش می یابد، لذا در سطوح مختلف تجزیه با توابع رگرسیون با تعداد متفاوت متغیر مستقل مواجه هستیم و همانطور که بیان شد، برای مقایسه نیکویی برازش از رابطه (۸) استفاده می شود.

#### ۴. پایش پروفایل های غیر خطی با استفاده از تبدیل

##### موجک ها

در  $DWT$  در صورتیکه مشاهدات دارای توزیع نرمال باشند، ضرایب موجک ها ( $W_{j,k}$ ) به صورت مجانبی (با افزایش  $m$ ) دارای توزیع نرمال می باشند. [۱۹] اگر  $\theta_{jk}$  پارامتر جامعه (ضرایب تبدیل موجک) باشد:

$$\sqrt{n} (W_{jk} - \theta_{jk}) \overset{Asy}{\approx} N(0, \sigma^2) \quad (9)$$

#### ۴-۱. پایش میانگین پروفایل در حالت شیفیت کلی

با توجه به رابطه (۹) برای پایش میانگین پروفایل با استفاده از ضرایب  $C_{j_0k}$  می توان از نمودارهای کنترل پایش میانگین پروفایلهای خطی (ساده، چند گانه و چند جمله ای) در فازهای  $\mathbf{I}$  و  $\mathbf{II}$  (مانند  $MEWMA$ ،  $\chi^2$ ،  $MCUSUM/slrt$ ،  $T^2$ ) استفاده نمود. در این مقاله از آماره

$$D = \sqrt{(\beta_\delta - \beta_0)' \Sigma_\beta^{-1} (\beta_\delta - \beta_0)} \quad \beta_\delta = \beta_0 + \delta$$

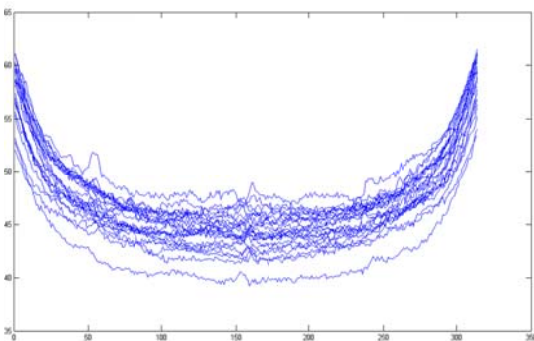
آماره (۱۶) یک آماره تک متغیره است که می توان براساس روش های تک متغیره **CUSUM**، آستانه **H** را چنان انتخاب نمود، که خطای نوع اول مورد نظر را نتیجه بدهد. برای پایش واریانس از آماره رابطه (۱۷) استفاده شده است.

$$\chi_i^2 = \sum_{j=1}^n \left( \frac{e_{ij}}{\sigma} \right)^2 \quad (17)$$

در رابطه بالا  $e_{ij} = y_{ij} - f(x_{ij} - \beta)$  تفاوت بین پروفایل مشاهده شده و پروفایل مبنا است. حد کنترل آماره رابطه (۱۷)  $UCL = \chi_{n,1-\alpha}^2$  می باشد.

### ۶. مثال عددی

به منظور ارائه نتایج روش های ارائه شده در بخش های سوم و چهارم از داده های **VDP** استفاده شده است. چگالی عمودی تخته های نئوپان مشخصه کیفیتی است که در مکان های مختلف پایش می شود. در فرآیند تولید مشخص شده است که ضخامت در مرکز تخته های نئوپان کمتر از قسمت های بالایی و پایینی است. ۲۴ پروفایل و در هر پروفایل ۳۱۴ مشاهده از چگالی عمودی تخته با فواصل **002** اینچ گرفته شده است (شکل ۱).



شکل ۱. داده های مربوط به ۲۴ پروفایل

تعداد مقیاس ها برای ۳۱۴ مشاهده براساس رابطه (۳) **J=8** می

باشد، لذا فواصل توابع مقیاس روی فواصل  $\left[ \frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j} \right)$  با تغییر  $j=0, \dots, 7$  تعریف می شوند.

در شکل های ۲، ۳، ۴ برآوردهای داده های **VDP** با استفاده از توابع پایه هار<sup>۴۷</sup> به ترتیب به ازاء **j=6**، **j=4**، **j=2** نمایش داده شده است. با کاهش **j** از تعداد ضرایب موجک در تابع رگرسیون کاسته می شود و دقت تخمین نیز کاهش می یابد. لذا انتخاب سطح تجزیه ای که کمترین ضرایب موجک با

در رابطه (۱۴)  $\chi_i^2$  آماره پایش تغییر پذیری در **I** امین پروفایل،  $d_{l,j-1,k}$ ، **k** امین ضریب موجک در پایین ترین سطح تجزیه پروفایل **I** ام و  $\sigma$  برآورد واریانس مشاهدات درون پروفایل براساس رابطه (۱۳) است.  $\chi_i^2$  دارای توزیع کای-اسکوار با  $\left( \frac{n}{2} - 1 \right)$  درجه آزادی است.

### ۵. روشهای موجود پایش پروفایل های غیر خطی در

#### II فاز

براساس ادبیات موجود، پایش پروفایل های غیر خطی را می توان به دو گروه تقسیم بندی نمود. در یک گروه از نمودارهای کنترل مبتنی بر ضرایب رگرسیون غیر خطی و در گروه دیگر از ضرایب رگرسیون ناپارامتریک برای پایش میانگین فرآیند استفاده می شود. علیرغم کاربرد فراوان پروفایل های غیر خطی در صنعت، در مقالات معدودی به پایش پروفایل های غیر خطی پرداخته شده است. در پایش پروفایل های غیر خطی با استفاده از رگرسیون، در فاز **I**، ویلیامز و همکاران [۹] و در فاز **II** واقفی و همکاران [۱۱] روشهایی را برای پایش پروفایل های غیر خطی ارائه دادند. از آنجا که هدف از این مقاله پایش پروفایل غیر خطی در فاز **II** است، نتایج روشهای پیشنهادی با روشهای ارائه شده در مقاله واقفی و همکاران [۱۱] مقایسه می گردد. در ادامه به روشهای موجود پایش پروفایل های غیر خطی با استفاده از رگرسیون غیر خطی در فاز **II** بیان می گردد.

#### ۵-۱. نمودار کنترل چند متغیره $T^2$

استفاده از نمودار کنترل  $T^2$  براساس ضرایب رگرسیون با فرض اینکه پارامترهای مدل ضرایب رگرسیون ( $\beta$ ) و ماتریس واریانس-کوواریانس ( $\Sigma$ ) در فاز **I** محاسبه شده است. آماره فوق برای پروفایل **I** ام با استفاده از رابطه (۱۵)

$$T_i^2 = (\hat{\beta}_i - \bar{\beta})' \Sigma^{-1} (\hat{\beta}_i - \bar{\beta}) \quad (15)$$

بدست می آید. اگر **p** تعداد پارامترهای رگرسیون غیر خطی با شد نمودار کنترل آماره  $T_i^2$  دارای حد اطمینان  $UCL = \chi_{p,\alpha}^2$  می باشد.

#### ۵-۲. ترکیب $\chi^2$ و **MCUSUM**

در این روش از نمودار کنترل **MCUSUM** براساس رابطه (۱۶) برای پایش میانگین استفاده می شود.

$$S_i = \max(S_{i-1} + a\hat{\beta}_i - .5D, 0) \quad (16)$$

در این رابطه  $S_0 = 0$

$$a' = \frac{(\beta_\delta - \beta_0)' \Sigma_\beta^{-1}}{\sqrt{(\beta_\delta - \beta_0)' \Sigma_\beta^{-1} (\beta_\delta - \beta_0)}}$$

به عنوان سطح تجزیه انتخاب می شود و در این سطح در مقابل جایگزینی ۲۰ ضریب با ۳۱۴ مشاهده، فقط ۴ درصد اطلاعات از دست می رود.

### ۲-۶. کارایی روش های پیشنهادی

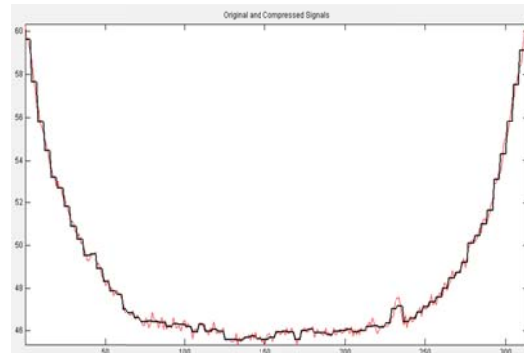
درپایش پروفایل داده های **VDP** با استفاده از روش ارائه شده در بخش سوم، بهترین مقیاس تجزیه، سطح ۴ می باشد. تابع رگرسیون (رابطه ۲) با ۲۰ ضریب  $C_{jk}$ ، از ۹۶٪ توضیح دهندگی برخوردار است (جدول ۱). به منظور پایش واریانس جزء خطا از روش پیشنهادی مقاله در بخش ۴ براساس آماره رابطه (۱۴) استفاده شده است و بررسی پایداری میانگین پروفایل با استفاده از آماره چند متغیره  $T^2$  انجام می شود که ترکیب این دو آماره برای پایش همزمان میانگین و واریانس (درون) پروفایل با  $Wavelet - \chi^2 T^2$  نشان داده می شود.

### جدول ۱. مقادیر ضریب تعیین در سطوح مختلف تجزیه

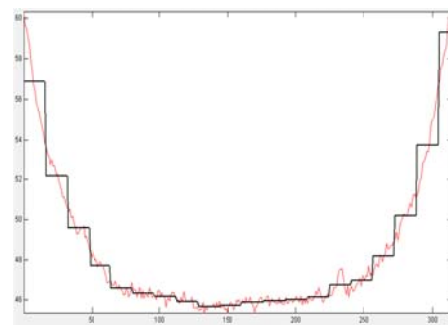
تعداد ضرایب سطح تجزیه	مدل	RSS	ضریب تعیین $\bar{R}^2$
۱	۱۵۷	۶۵۹	<b>۰.۹۹۸</b>
۲	۷۹	۱۹۳۷	<b>۰.۹۹۵</b>
۳	۴۰	۵۶۶۴	<b>۰.۹۸۶</b>
۴	۲۰	۱۶۷۲۳	<b>۰.۹۶</b>
۵	۱۰	۵۷۸۴۱	<b>۰.۸۶</b>
۶	۵	۱۷۵۵	<b>۰.۶۸</b>
۷	۳	۲۶۷۸	<b>۰.۳۵</b>
۸	۲	۳۱۷۴	<b>۰.۲۳</b>

از آنجا که هدف از این مقاله پایش پروفایل غیر خطی در فاز **II** است براساس نتایج مقاله ویلیامز و همکاران [۹] پروفایل های شماره ۱۵ و ۱۸ که در فاز **I** خارج از کنترل بوده از محاسبات تخمین پارامترهای مدل (میانگین و واریانس) در روابط (۱۰)، (۱۳) و (۱۷) حذف شده اند. دو نمودار کنترل به گونه ای طراحی شده اند که معیار **ARL** تحت کنترل کل تقریباً ۲۰۰ یا  $\alpha_{overall} = 0.005$  باشد. برای هریک از آماره های پایش میانگین و واریانس  $\alpha$  براساس رابطه  $\alpha = 1 - (1 - \alpha_{overall})^{\frac{1}{2}}$  بدست می آید که با استفاده از آن **ARL** نمودارهای کنترل میانگین و واریانس در حالت تحت کنترل ۴۰۰ در نظر گرفته شده است. برای دستیابی به **ARL** تحت کنترل ۲۰۰ در نمودار کنترل  $Wavelet - \chi^2 T^2$ ، حد کنترل بالا به

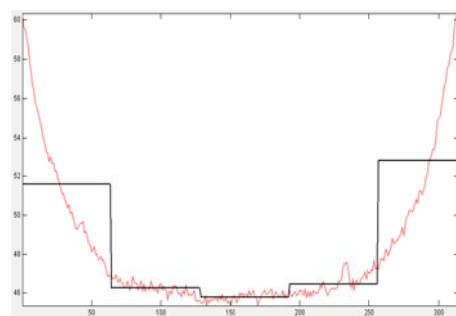
فرکانس پایین ( $C_{j0k}$ ) را داشته و در آن سطح تجزیه ویژگیهای اصلی پروفایل حفظ شود، مدنظر است.



شکل ۲. برآورد با استفاده از توابع هار در سطح ۲،  $j=6$



شکل ۳. برآورد با استفاده از توابع هار در سطح ۴،  $j=4$



شکل ۴. برآورد با استفاده از توابع هار در سطح ۶،  $j=2$

### ۶-۱. تعیین سطح تجزیه

در جدول ۱، ضرایب تعیین تعدیل شده  $\bar{R}^2$ ، تعداد ضرایب و  $RSS^{FA}$  در هر سطح تجزیه آمده است. ضریب تعیین درصد توضیح دهندگی تابع رگرسیون از کل تغییرات مشاهدات است که تا سطح تجزیه چهارم دارای شکست نمی باشد. لذا سطح ۴

واریانس رگرسیون پارامتریک در رگرسیون ناپارامتریک برآوردی آریبی از واریانس جزء خطا بدست می دهد، برای برآورد واریانس جزء خطا از آماره پیشنهادی در ادبیات رگرسیون ناپارامتریک با موجک ها استفاده شده است. عملکرد نمودار کنترل پیشنهادی تحت شیفت کلی در میانگین برای داده های VDP ارائه شده است.

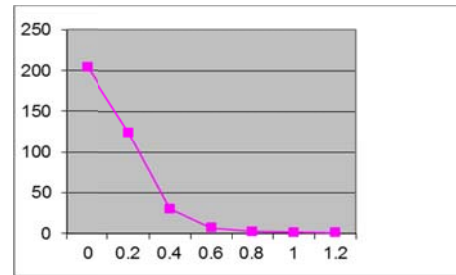
با توجه به اینکه تبدیل موجک ها خاصیت نرمال بودن مشاهدات را حفظ می کنند، کلیه نمودارهای کنترل معرفی شده

در پایش پروفایل های خطی مانند  $(MCUSUM/\chi^2)$  و  $(MEWMA)$  برای پایش میانگین پروفایل قابل استفاده است. مقایسه عملکرد این نمودارهای کنترل (در پایش میانگین پروفایل) با نمودارهای پیشنهادی میانگین در این مقاله می تواند موضوعی برای تحقیقات آتی باشد.

### پی نوشت

1. Dummy
2. Nonlinear Mixed Model
3. Nonstationary
4. Mean Square Error
5. Smoothing
6. Sharp Change
7. Discrete Wavelet Transform
8. Universal Threshold
9. Akaike Information Criterion
10. Local Shift
11. Average Run Length
12. Haar Wavelet
13. Waveform Signal
14. Bonferroni Limit
15. Semi-parametric Regression
16. Mixed Effect
17. De-noising
18. Compression
19. Threshold
20. Decomposition Level
21. Goodness of Fit
22. Within-Profile
23. Vertical Density Profile
24. Scale Function
25. Translation
26. Dilation
27. Decomposition Level
28. Pyramid Algorithm
29. Independent Identically Distributed
30. Compression
31. De-noising
32. Hard Threshold Function
33. Soft Threshold Function
34. Universal Threshold
35. Multi-resolution Analysis

ترتیب  $2.33 \times 10^5$  و  $210.5$  برای هر یک از نمودارهای کنترل  $T^2$  و  $\chi^2$  در نظر گرفته شده است.



شکل ۵. مقایسه ARL خارج از کنترل تحت شیفت

در میانگین فرآیند (از  $b$  به  $b + \lambda\sigma$ )

محاسبه آماره ARL تحت تغییرات خارج از کنترل در پارامترهای میانگین مدل (ضرایب تقریب موجک) براساس  $\lambda\sigma$  (اسکالر) به ازاء ۱۰۰۰ بار شبیه سازی بدست آمده است.

عملکرد نمودار کنترل  $T^2$  - Wavelet تحت شیفتهای مختلف در میانگین فرآیند در شکل ۵ ارائه شده است.

### ۷. نتیجه گیری و پیشنهادات

کیفیت بسیاری از فرآیندهای تولیدی به وسیله رابطه غیر خطی بین متغیر وابسته (ویژگی کیفیتی) و متغیر یا متغیرهای مستقل بیان می شود، که به آن پروفایل غیر خطی گویند. روش های مبتنی بر رگرسیون غیر خطی برای پایش پارامترهای این فرآیندها، دارای دو ایراد است،

اول اینکه توزیع پارامترهای رگرسیون در نمونه های کوچک مشخص نیست و دوم با افزایش پیچیدگی فرآیند، تعداد پارامترهای رگرسیون افزایش یافته، که منجر به کاهش توان آزمون می شود. تبدیل موجک ها روشی توانمند برای مدل سازی فرآیندهای پیچیده و دارای تغییرات تیز است، که استفاده از آن در پایش پروفایل های غیر خطی مورد توجه محققان متعددی قرار گرفته است.

در این مقاله استفاده از رگرسیون ناپارامتریک با موجک ها برای پایش میانگین پروفایل های غیر خطی در فاز II پیشنهاد شده و از ضرایب تقریب موجک به عنوان پارامترهای میانگین پروفایل استفاده شده است. از آنجا که شکل تابع رگرسیون (تعداد ضرایب) در رگرسیون ناپارامتریک با موجک ها بر اساس سطح تجزیه تعبیر می یابد براساس ضریب تعیین تعدیل شده ( $\bar{R}^2$ ) ابتدا سطح تجزیه مناسب در تبدیل موجک ها مشخص و سپس در سطح تجزیه تعیین شده، با استفاده از آماره چند متغیره  $T^2$  میانگین پروفایل پایش می شود. از آنجا که برآوردگرهای



- [8] Walker , E.Wright,S.Comparing curves using additive models.Journal of Quality Technology, (2002), Vol. 34, pp. 118-129.
- [9] Williams, J. D.Woodall, W.H.Birch,J.B. Statistical Monitoring of Nonlinear Product and Process Quality Profiles. Quality and Reliability, (2007), Vol. 23, pp. 925-941.
- [10] Jensen, W. A. Birch, j. b. Woodall, W. H. Profile Monitoring via Nonlinear Mixed Models. Journal of Quality Technology, (2009), Vol. 41, pp.18-34.
- [11] Vaghefi, A., Tajbakhsh, S.D., Noorossana, R. Phase II Monitoring of Nonlinear Profiles. Communication in Statistics-Theory and Methods, (2009), Vol. 38, pp. 1834-1851.
- [12] Jin, J. Shi,J. Automatic Feature Extraction of Waveform Signal in Process Diagnostic Performance Improvement .Journal of Intelligent Manufacturing, (2001), Vol. 12, pp. 140-145.
- [13] Lada ,E.K ., Lu , J.-C.,Wilson , J.R.A A Wavelet-based Procedure for Process Detection.IEEE Trans-semicond.manuf (2002), Vol. 15, pp. 79-90.
- [14] Jeong, M.k,Lu,J.C,Wang.N.Wavelet-based SPC Procedure for Complicated Functional Data. International Journal of Production Research, (2006), Vol. 44, pp. 729-744.
- [15] Zou,c.Zhang,Y.Wang,Z.A Control Chart Based on Change Point Model for Monitoring Profiles.IIE Transactions-Quality and Reliability Engineering, (2006), Vol. 38, pp. 1093-1103.
- [16] Chicken, E.Pignatiello,J.Simpson,J.R. Statistical Process Monitoring of Nonlinear Profiles using Wavelets, (2009), Vol. 41, pp.198-212.
- [17] Paynabar,K.Jin,J. Characterization of Nonlinear Profiles using Mixed-effect Models and Wavelets.IIE Transactions, (2011), Vol. 43, pp. 275-290.
- [18] Daubechies,I.Ten Lectures on Wavelets,SIAM,Philadelphia,PA, (1992).
36. Median of Absolute Deviation
37. Robust Estimator
38. Model Specification
39. Coefficient of Determination
40. Total Sum of Square
41. Estimated Sum of Square
42. Residual Sum of Square
43. Adjusted Coefficient of Determination
44. Sample Covariance Matrix
45. Common Variance
46. Pooled Data
47. Haar
48. Residual Sum of Square

### مراجع

- [1] Kang ,L., Albin, S.L..On-Line monitoring when the process yields a linear profile. Journal of Quality Technology, (2000), Vol. 32, pp. 418-426.
- [2] Kim , K.,Mahmoud,M.A.,Woodall , W.H .On the monitoring of linear profiles .Journal of Quality Technology (2003), Vol. 35, pp. 317-328.
- [3] Mahmoud,A.M.,Woodal,W.H..Phase I analysis of linear profiles with calibration application.Technometrics, (2004), Vol. 46, pp. 380-391.
- [4] Noorossana,R.Amiri,A.Soleimani,P.On the Monitoring of Autocorrelated Linear Profiles.Communications in Statistics Theory and Methods, (2008), Vol. 37, pp. 425-442.
- [5] Mahmoud,A.Phase I Analysis of Multiple Linear Regression Profiles. Communication in Statistics-Simulation and Computation, (2008), Vol. 37, pp. 2106-2130
- [6] Kazemzadeh , R.B., Noorossana , R ., Amiri ,A.Phase I monitoring of Polynomial profiles. Communications in Statistics-Theory and Methods, (2008), Vol. 37, pp.1671-1686.
- [7] Noorossana, R. Eyvazian, M. Amiri, A. Mahmoud, A.Statistical Monitoring of Multivariate Multiple Linear Regression Profiles in Phase I with Calibration Application. Quality and Reliability Engineering International, (2009).

[20] Rencher, A.C. Methods of Multivariate analysis. Wiley Interscience, (2002).

[19] Ogden, T.R. Essential Wavelets for Statistical Applications and Data Analysis, (1997), Birkhauser.