



## Providing One Robust Approach to Optimize Queuing Networks

R. Baradaran Kazemzadeh<sup>\*</sup>, A. Salmasnia & A. Yazdkhasti

Reza Baradaran Kazemzadeh, Department of Industrial Engineering, Tarbiat Modarres, Tehran, rkazem@gmail.com

Ali Salmasnia, Department of Industrial Engineering, Tarbiat Modarres, Tehran, ali.salmasnia.85@gmail.com

Amin Yazdkhasti, Department of Industrial Engineering, Tarbiat Modarres, Tehran, yazdekhashti.amin@gmail.com

### Keywords

Queuing networks;  
Desirability function approach;  
Response Surface Methodology;  
Branch and Bound

### ABSTRACT

*Queuing systems play important role on modeling and interpreting different issues such as information technology, transportation, supply change management, and traffic control at industrial and non-industrial systems in current world. One of more complex but applicable forms in queuing systems, is queue networks which are important in order to establish proper system and optimize them. So, available approaches deal with to analyze situations or decide optimal size of system's variables only base on one goal, while it is logical to consider various goals for determining optimal system, thus optimizing base on this, leads to system being more realistic. Therefore in this paper, we offer one multi-objective optimization approach base on desirability function in order to solve queue network's problems. Another important intended concept in proposed approach, is making robust process which refers to low sensitivity of goals to uncontrollable variables (noise factors). Features of proposed approaches were mapped through giving numerical examples.*

© 2013 IUST Publication, IJIEPM. Vol. 24, No. 2, All Rights Reserved

<sup>\*</sup> **Corresponding author.** Reza Baradaran Kazemzadeh  
Email: rkazem@gmail.com



## ارائه یک رویکرد استوار برای بهینه سازی شبکه های صف

رضا برادران کاظم زاده\*، علی سلماس نیا، امین یزدخواستی

### چکیده:

سیستم های صف در دنیای امروزی از نقشی مهم در مدلسازی و تفسیر مسائل مختلف نظیر تکنولوژی اطلاعات، حمل و نقل، زنجیره تامین و کنترل ترافیک، در سیستم های صنعتی و غیر صنعتی برخوردار هستند. یکی از پیچیده ترین و در عین حال کاربردی ترین مدلها در سیستم های صف، شبکه های صف می باشند، که به منظور استقرار سیستمی مناسب، بهینه سازی آنها حائز اهمیت است. برای این مهم، رویکردهای موجود به تجزیه و تحلیل شرایط و یا تعیین اندازه بهینه متغیر های سیستم تنها بر اساس یک هدف می پردازند و این در حالی است که برای تعیین سیستمی بهینه، در نظر گرفتن اهداف مختلف امری منطقی است و لذا بهینه سازی بر این اساس باعث واقعی تر شدن سیستم می گردد. از این رو در این مقاله یک رویکرد بهینه سازی چند هدفه بر اساس رویکرد تابع مطلوبیت برای حل مسایل شبکه های صف ارائه می کنیم. مفهوم مهم دیگری که در رویکرد پیشنهادی در نظر گرفته شده، استوار سازی مدل شبکه های صف است که به حساسیت کم اهداف به متغیرهای غیر قابل کنترل (فاکتورهای اختلال) اطلاق می گردد. ویژگی های رویکرد پیشنهادی از طریق ارائه مثال عددی ترسیم شده اند.

### کلمات کلیدی

شبکه های صف؛  
رویکرد تابع مطلوبیت؛  
روش سطح پاسخ؛  
الگوریتم انشعاب و تحدید

### ۱. مقدمه

تئوری مدرن صف یکی از قدرتمندترین ابزارها برای تجزیه و تحلیل کیفی و کمی انواع سیستم ها شامل ارتباطی، شبکه های کامپیوتری، حمل و نقل و سایر سیستم های فنی است (Minkevicius, 2009; Cruz, 2008). یکی از مهمترین و پرکاربردترین انواع سیستم های صف، شبکه های صف<sup>۱</sup> هستند که در حوزه های مختلفی نظیر تکنولوژی اطلاعات<sup>۲</sup>، زنجیره تامین<sup>۳</sup>، کنترل ترافیک<sup>۴</sup>، اینترنت<sup>۵</sup> و سیستم های تولیدی<sup>۶</sup> و خدماتی به

وفور بکار می روند (Minkevicius, 2009; Ye Awan et al. 2007; 2009; Bhaskar and Lallement, 2010; Leite and Fragoso 2010). شبکه های صف ترکیبی از چند سیستم فرعی بوده که از نظر ورودی به یکدیگر وابسته می باشند ولی بطور مستقل به ارائه خدمت می پردازند و مشتریان برای دریافت تعدادی از این خدمات ارائه شده به سیستم مراجعه می نمایند (مدرس یزدی، ۱۳۷۰). بهینه سازی چنین سیستم هایی با توجه به کاربرد فراوانشان بسیار حائز اهمیت است اما ارائه یک راه حل بهینه برای این مدل از سیستم های صف، به خصوص در زمانی که انصراف<sup>۸</sup> وجود دارد کاری بس دشوار بوده و به جز بعضی از موارد خاص نظیر شبکه سیکلیک دو ایستگاهی و شبکه های برگشت پذیر، دسترسی به یک جواب بهینه بطور کلی دسترس ناپذیر است (Awan et al. 2007). از اینرو در ادبیات برای شبکه های صف دلخواه که زمان های ورود، خروج و سرویس غیر مارکوفی دارند و به علاوه دارای شرایط انصراف نیز می باشند، تکنیک های عددی و تقریب های تحلیلی بکار می رود (Baskett et al. 1975);

تاریخ وصول: ۹۰/۸/۸

تاریخ تصویب: ۹۰/۱۲/۲۱

\* نویسنده مسئول مقاله: دکتر رضا برادران کاظم زاده، دانشیار دانشکده فنی مهندسی دانشگاه تربیت مدرس rkazem@modares.ac.ir

علی سلماس نیا، دانشجو دانشگاه تربیت مدرس، دانشگاه تربیت مدرس  
امین یزدخواستی، دانشجو دانشگاه تربیت مدرس، دانشگاه تربیت مدرس

<sup>2</sup> Queueing Network

<sup>3</sup> Information Technology(IT)

<sup>4</sup> Supply Chain Management(SCM)

<sup>5</sup> Traffic Control

<sup>6</sup> Internet

<sup>7</sup> Manufacturing Systems

<sup>8</sup> Blocking

اهداف و غافل از اثر پراکندگی (انحراف استاندارد اهداف) است. این مطالعه یک روش استوار برای بهینه سازی شبکه های صف بر مبنای متدولوژی تابع مطلوبیت ارائه می نماید. روش پیشنهادی علاوه بر آنکه بطور هم زمان به مینیم سازی زمان انتظار مشتری و ماکزیمم سازی به کارگیری سرویس دهنده می پردازد سعی می کند انحراف استاندارد اهداف ذکر شده را نیز مینیمم نماید. همچنین رویکرد پیشنهادی تضمین می کند میانگین و انحراف استاندارد تمامی اهداف DM در ناحیه مطلوب قرار می گیرد. بنا بر دانش ما این اولین باری است که در ادبیات مربوط به شبکه های صف چنین رویکرد بهینه سازی ارائه شده، که سعی بر بهینه سازی مناسب و استوار مدل شبکه های صف با در نظر گرفتن همزمان چند معیار دارد. ادامه مقاله به شکل زیر است:

قسمت ۲ رویکردی پیشنهادی را بطور کامل تشریح می کند و به دنبال آن در قسمت ۳ با ارائه یک مثال عددی در مورد شبکه صف موجود در یک پیتزا فروشی، کارایی رویکرد پیشنهادی به تصویر کشیده می شود. قسمت ۴ شرایط بهینه سازی را تنها برای یک متغیر که دارای اهمیت فراوانی از نظر DM می باشد مطرح می نماید و در قسمت ۵ نتیجه گیری و جمع بندی ارائه خواهد شد.

## ۲. رویکرد پیشنهادی<sup>۴</sup>

در این قسمت یک رویکرد استوار برای بهینه سازی سیستم های صف بر اساس تابع مطلوبیت تعدیل شده ارائه می شود. این رویکرد از ۴ فاز:

۱- طراحی آزمایش ها<sup>۵</sup> (DOE)،

۲- متدولوژی سطح پاسخ<sup>۶</sup> (RSM)،

۳- رویکرد تابع مطلوبیت و

۴- بهینه سازی سیستم صف تشکیل شده است. در فاز اول بر اساس اهداف و متغیرهای تصمیم<sup>۷</sup> تاثیر گذار بر آنها، یک طرح آزمایش مناسب جهت جمع آوری داده های مورد نیاز بکار گرفته می شود. فاز دوم با استفاده از روش سطح پاسخ، رابطه بین میانگین و انحراف استاندارد اهداف با متغیرهای تصمیم را بدست می آورد. در فاز سوم تابع مطلوبیت متناظر با میانگین و انحراف استاندارد هر هدف بصورت مجزا ساخته می شود و تابع تجمیع اصلاح شده ارائه می گردد.

نهایتاً در فاز چهارم تابع مطلوبیت کل بدست آمده، بر حسب متغیرهای تصمیم ماکزیمم می شود. با توجه به اینکه در تابع مطلوبیت، متغیرها پیوسته پنداشت می گردند و از آنجایی که

(Kelly 1975). اکثر تکنیک های موجود در ادبیات صرفاً یا به تجزیه و تحلیل سیستم های تحت مطالعه می پردازند و یا در صورت بهینه سازی نیز سیستم را تک هدفه فرض می کنند. این درحالی است که در بیشتر سیستم های صف با چند هدف متناقض روبرو هستیم بدین معنی که ظرفیت سیستم به گونه ای انتخاب گردد که نه باعث اتلاف بیش از حد وقت مشتری ها شود و نه ظرفیت سیستم آنقدر زیاد انتخاب شود که به کارگیری خدمت دهنده ها از یک سطح قابل قبول کمتر گردد. به عبارت دیگر، بیشتر رویکردهای موجود تنها به توصیف شرایط کیفی سیستم اکتفا می کنند (Miller, 2009)، این در حالی است که تصمیم گیرنده<sup>۱</sup> (DM) عموماً چند هدف را به طور همزمان در نظر می گیرد. لذا با یک مساله چند هدفه<sup>۲</sup> مواجه هستیم (Kim and Lin, 2006). یکی از مشهورترین روش های برخورد با مسائل چند هدفه رویکرد تابع مطلوبیت<sup>۳</sup> است. این رویکرد اولین بار توسط Harrington در ۱۹۶۵ ارائه شد (Joseph E. Harrington, 1965). این روش بصورت سیستماتیک مقدار هدف تخمین زده شده  $\hat{y}_i(x)$  را به یک مقدار بی واحد  $d_i(x)$  بنام مطلوبیت تبدیل می نماید که در دامنه  $[0,1]$  می تواند تغییر کند. به طوریکه یک مقدار نزدیکتر به یک، از مطلوبیت بیشتری برخوردار است. به منظور تجمیع توابع مطلوبیت انفرادی، Harrington تابع مطلوبیت کل ( $D$ ) را با گرفتن میانگین هندسی از  $d_i(x)$  بصورت زیر تعریف کرد:

$$D = (d_1(x) \times d_2(x) \times \dots \times d_k(x))^{1/k} \quad (1)$$

به طوریکه  $k$  تعداد توابع هدف را نمایش می دهد. محدودیت اصلی این روش این است که مقدار هدف هر مشخصه کیفی (تابع هدف) باید وسط ناحیه مطلوب متناظر قرار بگیرد. در این ارتباط GATZA and MCMILLAN (1972). تعدیل های اندکی در مدل Harrington انجام دادند و سپس DERRINGER and SUICH (1980). (یک نسخه اصلاح شده از تابع مطلوبیت ارائه کردند. در ادامه DERRINGER (1994). میانگین هندسی موزون را برای تجمیع توابع مطلوبیت بصورت زیر تعریف نمود تا بدین ترتیب اهمیت نسبی اهداف را به فرآیند بهینه سازی وارد نماید. به طوریکه  $w_i$  اهمیت نسبی تابع هدف  $i$  ام است.

$$D = (d_1(x)^{w_1} \times d_2(x)^{w_2} \times \dots \times d_k(x)^{w_k})^{1/\sum w_i} \quad (2)$$

با توجه به مطالب ذکر شده می توان نتیجه گرفت که تمرکز اصلی روش های بر مبنای تابع مطلوبیت صرفاً روی اثر مکانی (میانگین)

<sup>4</sup> Proposed method

<sup>5</sup> Design Of Experiment (DOE)

<sup>6</sup> Response Surface Methodology

<sup>7</sup> Decision variable

<sup>1</sup> Decision Maker

<sup>2</sup> Multiresponse problem

<sup>3</sup> Desirability function approach

## ۲-۲. متدولوژی سطح پاسخ (RSM)

پس از آنکه با استفاده از طراحی آزمایش ها داده های مربوط به اهداف سیستم صف به دست آمدند لازم است تا ارتباطی مناسب بین متغیر های تصمیم و اهداف مورد نظر برقرار شود. برای این امر تکنیک سطح پاسخ به علت سهولت بسیار مورد توجه قرار گرفته است. این تکنیک شامل مجموعه روش هایی است که سعی در شناخت و درک ارتباط بین متغیر های ورودی و خروجی سیستم دارد. در واقع در این تکنیک طراح به دنبال برقراری یک ارتباط بهینه بین مجموعه متغیر های مذکور می باشد (Kim and Lin, 2000; Jeong and Kim, 2009; Kim and Lin, 2006; Jeong and Kim, 2009). و به علاوه وجود یک تخمین مناسب و بهینه که روابط را به طور دقیق و صحیح بیان کند در تبیین و تفسیر سیستم صف نقش بسزایی داشته و می توان گفت که بهینه سازی چنین سیستم صفی بدون درکی صحیح از روابط مناسب و بهینه بین میانگین و انحراف استاندارد اهداف، عملاً کاری بیهوده است. از اینرو در این فاز یک تابع ارتباط مناسب بین میانگین و انحراف استاندارد هر یک از اهداف با متغیر های تصمیم به وسیله RSM بدست می آوریم.

## ۲-۳. رویکرد تابع مطلوبیت (Desirability function approach)

بر اساس رویکردهای سنتی، RSM تنها بر روی یک هدف تمرکز کرده و سطح بهینه آن را مشخص می نماید. اما همچنانکه پیش از این اشاره شد در عمل برای مدل های صف، تعداد اهداف مورد نظر بیش از یک مورد است. از آنجاییکه این اهداف معمولاً با یکدیگر در تناقض هستند بهبود یکی منجر به دور شدن بقیه اهداف از مقادیر بهینه شان خواهد شد. بنابراین تعیین مقادیر بهینه متغیر های تصمیم تنها از طریق بهینه سازی اهداف قابل تصور است، که به این حالت یک مساله چند هدفه<sup>۵</sup> می گویند (Kim and Lin, 2006). یکی از مشهورترین روش های تجمیع متغیر های پاسخ، رویکرد تابع مطلوبیت می باشد که این امکان را برای DM فراهم می کند که بین مدل های مختلف از سیستم تحت مطالعه تفاوت معنادار قائل شده و این اطمینان حاصل شود که همه اهداف در سطح مناسبی از مطلوبیت قرار گیرند.

### ۲-۳-۱. تشریح مدل<sup>۶</sup>

فرض می کنیم که  $k$  هدف و  $p$  متغیر تصمیم موجود است، برای هر هدف داریم:

$$y_i(x) = f_i(x_1, x_2, \dots, x_p) + \varepsilon_{ij} \quad (3)$$

<sup>5</sup> Multi Objective problem

<sup>6</sup> Model Description

اکثراً متغیرهای موجود در طراحی مدل صف از نوع عدد صحیح هستند (مثل تعداد سرویس دهنده)، بایستی نتایج حاصل تعدیل شوند.

لذا در این قسمت از رویکرد بهینه سازی، با استفاده از روش انشعاب و تحدید<sup>۱</sup> (B&B) نتایج حاصل به بهترین مقدار صحیح خود، برای حفظ بهینگی تابع مطلوبیت، تغییر می یابند. علت استفاده از الگوریتم انشعاب و تحدید در این است که روش شمارشی جواب های موجود با این رویکرد، بطور آگاهانه طراحی شده و تنها با بررسی درصد اندکی از جواب ها، مقادیر بهینه برآورد می شوند. در زیر هر یک از قسمت های نامبرده شده از مدل بهینه سازی، با جزئیات بیشتر بیان می گردند.

## ۲-۱. طراحی آزمایش ها DOE (جمع آوری داده ها)

هدف از پیاده سازی طراحی آزمایش ها به دست آوردن حداکثر اطلاعات ممکن با حداقل تعداد آزمایش ها است. یک آزمایش مجموعه ای از تلاش های برنامه ریزی<sup>۲</sup> شده می باشد که در آن متغیرهایی که گمان می رود بر اهداف تاثیر بگذارند، بصورت سیستماتیک تغییر می یابند و خروجی حاصل از این تغییرات (مقادیر اهداف) ثبت می شود (Montgomery, 2005; HACHICHA et al. 2010). با انجام آزمایش اطلاعاتی راجع به اینکه یک شبکه صف چگونه عمل می کند و دلایل تغییرات مشاهده شده در مدت زمان انتظار مشتریان و به کارگیری خدمت دهنده ها فراهم خواهد شد. به علاوه با استفاده از آن می توان رابطه بین متغیرهای تصمیم با اهداف سیستم صف، که در بسیاری از مدل ها دشوار و غیر عملی به نظر می رسد، به راحتی کشف کرد و زمینه لازم جهت بررسی این نوع از سیستم ها را فراهم نمود. بطور کلی دو نوع از معروف ترین طرح های آزمایش عبارتند از:

I. طرح های فاکتوری کامل<sup>۳</sup>

II. طرح های فاکتوری بخشی<sup>۴</sup>

عمده برتری طرح های فاکتوری کامل در بدست آمدن اطلاعات در رابطه با همه متغیر های تصمیم و روابط بین آنها است. ولی از طرفی با افزایش تعداد فاکتور ها، تعداد آزمایشات بطور نمایی افزایش می یابند (HACHICHA et al. 2010). در این قسمت از مدل بهینه سازی سیستم صف، با استفاده از طراحی آزمایش ها اطلاعات لازم جهت تخمین روابط بین متغیر های تصمیم و اهداف را بدست می آوریم.

<sup>1</sup> Branch and Bound(B&B)

<sup>2</sup> Planned trials

<sup>3</sup> Full Factorial Design

<sup>4</sup> Fractional Factorial Design

$$D = (d_1(\hat{y}_1(x)) \times d_2(\hat{y}_2(x)) \times \dots \times d_k(\hat{y}_k(x)))^{1/k} \quad (5)$$

معادله (۵) بگونه ای طراحی شده است که حتی اگر یکی از اهداف خارج از ناحیه مطلوب خود قرار گیرد (یا به عبارتی  $d_i(\hat{y}_i(x)) = 0$  شود) تابع مطلوبیت کل  $D = 0$  خواهد شد و لذا صرف نظر از مقادیر سایر اهداف، کل طرح رد می گردد از طرف دیگر زمانی  $D$  ماکزیمم می شود که همگی اهداف در سطح متعادلی از مطلوبیت قرار گیرند.

براساس نوع متغیرهای پاسخ موجود برای بدست آوردن  $d_i(\hat{y}_i(x))$  از تبدیل یک طرفه و یا دو طرفه به شرح استفاده می شود.

$$d_i(\hat{y}_i(x)) = \begin{cases} 0 & \hat{y}_i(x) \leq y_i^{\min} \\ \left[ \frac{\hat{y}_i(x) - y_i^{\min}}{y_i^{\max} - y_i^{\min}} \right]^{r_i} & y_i^{\min} \leq \hat{y}_i(x) \leq y_i^{\max} \quad i = 1, 2, \dots, k \\ 1 & \hat{y}_i(x) \geq y_i^{\max} \end{cases} \quad (6)$$

اگر هدف از نوع کمینه سازی باشد  $d_i(\hat{y}_i(x))$  را می توان به صورت زیر به دست آورد:

$$d_i(\hat{y}_i(x)) = \begin{cases} 1 & \hat{y}_i(x) \leq y_i^{\min} \\ \left[ \frac{\hat{y}_i(x) - y_i^{\max}}{y_i^{\min} - y_i^{\max}} \right]^{r_i} & y_i^{\min} \leq \hat{y}_i(x) \leq y_i^{\max} \quad i = 1, 2, \dots, k \\ 0 & \hat{y}_i(x) \geq y_i^{\max} \end{cases} \quad (7)$$

سرریزتر از  $y_i^{\min}$  (در شرایط بیشینه سازی) را نشان دهد. انتخاب مقادیر بزرگ برای  $r_i$  باعث می شود که شکل تابع  $d_i(\hat{y}_i(x))$  بصورت محدب شده و در نتیجه با افزایش  $\hat{y}_i(x)$ ،  $d_i(\hat{y}_i(x))$  بطور آهسته رشد کند. از این رو برای افزایش  $d_i(\hat{y}_i(x))$  بایستی به مقدار زیادی بزرگ گردد.

#### ۲-۳-۱-۲. تبدیل دو طرفه

زمانی که هدف  $\hat{y}_i(x)$  از نوع اسمی<sup>۵</sup> (NTB) است شکل تابع  $d_i(\hat{y}_i(x))$  به صورت (۸) می شود.

به طوریکه  $f_i$  نشان دهنده سطح پاسخ هدف  $\hat{y}_i$  نام بر حسب متغیرهای تصمیم است. همچنین فرض می شود که  $E(\varepsilon_{ij}) = 0$  است. بنابر تعریف انجام شده، امید ریاضی هدف  $\hat{y}_i$  عبارت است از:

$$E(y_i) = \hat{y}_i(x) = f_i(x_1, x_2, \dots, x_p) \quad (4)$$

اکنون امید ریاضی هدف  $\hat{y}_i$  به یک مقدار بی مقیاس به نام  $d_i(\hat{y}_i(x))$  مطلوبیت تبدیل می شود که در بازه  $[0, 1]$  تغییر می کند و یک مقدار نزدیکتر به یک مطلوبیت بیشتر DM را نشان می دهد. نهایتاً به منظور بهینه سازی هم زمان اهداف، توابع مطلوبیت متناظر آنها به صورت زیر تجمیع می گردند:

#### ۱-۳-۲. تبدیل یک طرفه<sup>۱</sup>

زمانی که اهداف از نوع بیشینه سازی<sup>۲</sup> (LTB) یا کمینه سازی<sup>۳</sup> (STB) باشند برای دستیابی به تابع مطلوبیت تبدیل یک طرفه بکار می رود که بصورت معادله (۶) (در زمان بیشینه سازی) می باشد.

در معادلات (۶) و (۷) نشان دهنده تابع مطلوبیت  $y_i^{\max}, y_i^{\min}$  نیز به ترتیب بیانگر حدود پایین و بالای مطلوب DM می باشند. پارامتر  $r_i$ ، متغیر شکل تابع<sup>۴</sup> بوده و DM می تواند با انتخاب مقادیر مختلف برای آن، میزان تمایل برای حرکت

<sup>1</sup> One-Sided Transformations

<sup>2</sup> Larger-The-Better(LTB)

<sup>3</sup> Smaller-The-Better(STB)

<sup>4</sup> Shape parameter

<sup>5</sup> Nominal-The-Best (NTB)

$$d_i(\hat{y}_i(x)) = \begin{cases} \left[ \frac{\hat{y}_i(x) - y_i^{\min}}{y_i^{\min} - y_i^{\max}} \right]^{s_i} & y_i^{\min} \leq \hat{y}_i(x) \leq T_i \\ \left[ \frac{\hat{y}_i(x) - y_i^{\max}}{T_i - y_i^{\max}} \right]^{t_i} & T_i \leq \hat{y}_i(x) \leq y_i^{\max} \\ 0 & \hat{y}_i(x) \leq y_i^{\min} \text{ or } \hat{y}_i(x) \geq y_i^{\max} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (8)$$

### ۳-۳-۲. رویکرد تابع مطلوبیت اصلاح شده

همانطوریکه پیش از این ذکر شد مینیمم سازی حساسیت اهداف نسبت به متغیرهای غیر قابل کنترل (مینیمم سازی انحراف استاندارد اهداف) در فرآیند بهینه سازی سیستم های صف از اهمیت ویژه ای برخوردار است. از این رو مطلوبیت کل ( $D_T$ ) را می توان به فرم زیر تعریف کرد:

$$D_T = D_{Opt}^{Y_1} \times D_{Rob}^{Y_2} \quad (9)$$

در معادله (۹)  $D_{Opt}$  و  $D_{Rob}$  را می توان به ترتیب از طریق (۱۰) و (۱۱) بدست آورد.

$$D_{Opt} = d_1(\hat{y}_1(x))^{w_1} \times d_2(\hat{y}_2(x))^{w_2} \times \dots \times d_k(\hat{y}_k(x))^{w_k} \quad (10)$$

$$D_{Rob} = d_{\sigma_1}(\hat{y}_{\sigma_1}(x))^{w_1} \times d_{\sigma_2}(\hat{y}_{\sigma_2}(x))^{w_2} \times \dots \times d_{\sigma_k}(\hat{y}_{\sigma_k}(x))^{w_k} \quad (11)$$

$D_T(x_1) - D_T(x_2)$  میزان برتری یک طرح و تمایل به آن را بطور عددی می توان بدست آورد. از طرفی مقایسه  $D_{Rob}$  برای دو طرح می تواند حائز اهمیت باشد زیرا ممکن است در شرایطی در نگاه اول با حاصل شدن  $D_{Opt}(x_1) > D_{Opt}(x_2)$  طرح اول انتخاب گردد، اما این طرح انتخابی در عمل با عملکردی ضعیف (در اثر وجود تغییرات)، صحت رویکرد بکار گرفته شده را زیر سوال ببرد. اما با معرفی  $D_{Rob}$  این اطمینان حاصل می شود که روش مذکور در عمل نسبت به تغییرات استوار بوده و به اصطلاح نیرومند عمل می کند.

### ۴-۳-۲. مقدار دهی اولیه پارامترها

همانطور که اشاره شد پارامترهای شکل ( $r, s, t$ ) میزان محدب بودن شکل تابع مطلوبیت را مشخص می نمایند و از طرفی مقادیر  $T_i, y_i^{\min}, y_i^{\max}$  به منظور تنظیم و ساده سازی سطوح پذیرش هدف  $t$  به کار می روند، لذا انتخاب پارامترهای مذکور امری مهم است. پارامترهای شکل بیان کننده هزینه انحراف هدف از مقدار بهینه هستند و بایستی با احتیاط انتخاب شوند (Jeong and Kim, 2009). به منظور کمک به DM در انتخاب درست مقادیر پارامترهای  $y_i^{\min}, y_i^{\max}$  به ترتیب نتایج حاصل کمینه سازی و بیشینه سازی معادلات رگرسیونی مربوط را پیشنهاد می گردد. این شیوه از آن جهت حائز اهمیت است که

$T_i$  نشان دهنده مقدار بهینه مربوط به هدف  $t$ ام می باشد و  $s_i$  و  $t_i$  نیز همان نقش  $r_i$  را در تبدیل یک طرفه بازی می کنند. رویکرد ذکر شده اگرچه در تجمیع اهداف بسیار خوب عمل می نماید، فرض می کند که واریانس اهداف در تمام ناحیه شدنی ثابت است. حال آنکه در بسیاری از موارد این یک فرض نادرست است و می تواند منجر به نتایج گمراه کننده در فرآیند بهینه سازی شود. برای حل این مشکل بایستی انحراف استاندارد اهداف را نیز به عنوان اهداف جدید در نظر گرفت. این مقاله با معرفی تابع مطلوبیت استوارسازی ( $D_{Rob}$ ) سعی در برطرف کردن این مشکل دارد. در ادامه به نحوه ترکیب تابع مطلوبیت استوارسازی با تابع مطلوبیت کل عرف که از این به بعد، تابع مطلوبیت بهینه سازی ( $D_{Opt}$ ) نامیده می شود خواهیم پرداخت.

در معادلات فوق  $d_i(\hat{y}_i(x))$  نشان دهنده مقدار مطلوبیت هدف  $\hat{y}_i(x)$  و  $d_{\sigma_i}(\hat{y}_{\sigma_i}(x))$  نشان دهنده مقدار مطلوبیت انحراف استاندارد  $\hat{y}_{\sigma_i}(x)$  است. همچنین  $w_i$  اهمیت نسبی هر یک از اهداف را نشان می دهد. به علاوه توان های  $\gamma_1, \gamma_2$  (بطوریکه  $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ ) پارامترهای تنظیم کننده اهمیت نسبی بهینه سازی و استوار سازی طبق نظر DM هستند. تابع مطلوبیت کل پیشنهادی علاوه بر آنکه میانگین اهداف را به سمت مقادیر بهینشان انتقال می دهد، انحراف استاندارد آنها را نیز مینیمم سازی می کند. قابل توجه است که اگر  $\gamma_1 > \gamma_2$  باشد نشان از اهمیت بیشتر نزدیک بودن میانگین اهداف به مقادیر بهینشان نسبت به مینیمم کردن انحراف استاندارد آنها دارد. حال آنکه اگر  $\gamma_2 > \gamma_1$  انتخاب شود نشان از حساسیت بالای DM به انحراف استاندارد اهداف دارد و اگر  $\gamma_2 = 0$  قرار داده شود مدل ارائه شده معادل تابع مطلوبیت کل عرف خواهد شد.

یکی از مهمترین فواید تعریف تابع مطلوبیت بصورت معادله (۹) این است که می توان طرح های مختلفی که سعی در مدل کردن یک سیستم صف دارند را بطور معنا داری از نقطه نظر متغیرهای پاسخ و همچنین توانایی مدل در مقابله با تغییرات، مقایسه نمود. بطور مثال اگر دو طرح  $x_1$  و  $x_2$  را در نظر بگیریم اگر  $D_T(x_1) > D_T(x_2)$  شود نشان از عملکرد بهتر طرح  $x_1$  و در نتیجه تمایل بیشتر DM به آن دارد. به علاوه با محاسبه

در معادله (۱۲)،  $\Omega$  ناحیه شدنی مربوط به بردار  $x$  می باشد. از آنجاییکه اکثر متغیرهای تصمیم شبکه های صف حالتی گسسته دارند، مثل تعداد سرویس دهنده ها، تعداد ایستگاه های کاری، انتخاب نظم اولویت و ... و از طرفی با توجه به آنکه نتایج حاصل از رویکرد تابع مطلوبیت بطور پیوسته حاصل می شود، نیاز است تا مقادیر غیر عدد صحیح به مقادیر عدد صحیح تغییر یابند. این باعث می گردد تا احتمالاً بهینگی جواب های بدست آمده پس از صحیح کردن جواب ها، دیگر درست نباشد. برای حل این مشکل راه حل منطقی استفاده از الگوریتم انشعاب و تحدید است. این روش با جستجویی آگاهانه، ضمن تضمین بهینگی، مقادیر بهینه متغیر تصمیم را به عدد صحیح تبدیل می نماید.

استفاده از رویکرد انشعاب و تحدید بسیار کارا بوده و باعث صرفه جویی در وقت و در محاسبات می گردد. (هیلیر و لیبرمن، ۱۳۸۱) لذا در این قسمت برای تعدیل جواب هایی که نیازمند صحیح شدن هستند از رویکرد مذکور بهره می گیریم. برای درک بهتر رویکرد پیشنهادی در بهینه سازی سیستم های صف، دیگرام این روش در شکل ۱ آمده است. که بخش های اصلی به همراه زیر بخش ها مربوط مشخص می باشند.

انتخاب کورکورانه این مقادیر در بعضی موارد می تواند منجر به آن شود که دامنه مطلوب انتخاب شده برای  $d_i(\hat{y}_i(x))$  از دامنه شدنی بزرگتر بوده و عملاً همه جواب های ممکن در بین حدود  $y_i^{\min}, y_i^{\max}$  قرار گیرند و چنین حالتی باعث کاهش شدید کارایی شده و خاصیت میانگین هندسی تابع مطلوبیت کل را از بین می برد. همانطور که اشاره شد طبق این خاصیت اگر یک  $d_i(\hat{y}_i(x)) = 0$  شود، تابع مطلوبیت کل صفر می گردد، اما در صورت تعریف نامناسب حدود، امکان صفر شدن  $d_i(\hat{y}_i(x))$  از بین رفته و این خاصیت خوب در بهینه سازی عملاً غیر قابل استفاده می شود.

#### ۴-۲. مدل بهینه سازی سیستم صف

مدل بهینه سازی سیستم صف بر اساس آنچه که در قسمت های قبل ارائه شده به شکل (۱۲) قابل بیان است.

$$\max D_T = D_{Opt}^{Y_1} \times D_{Rob}^{Y_2} \quad (12)$$

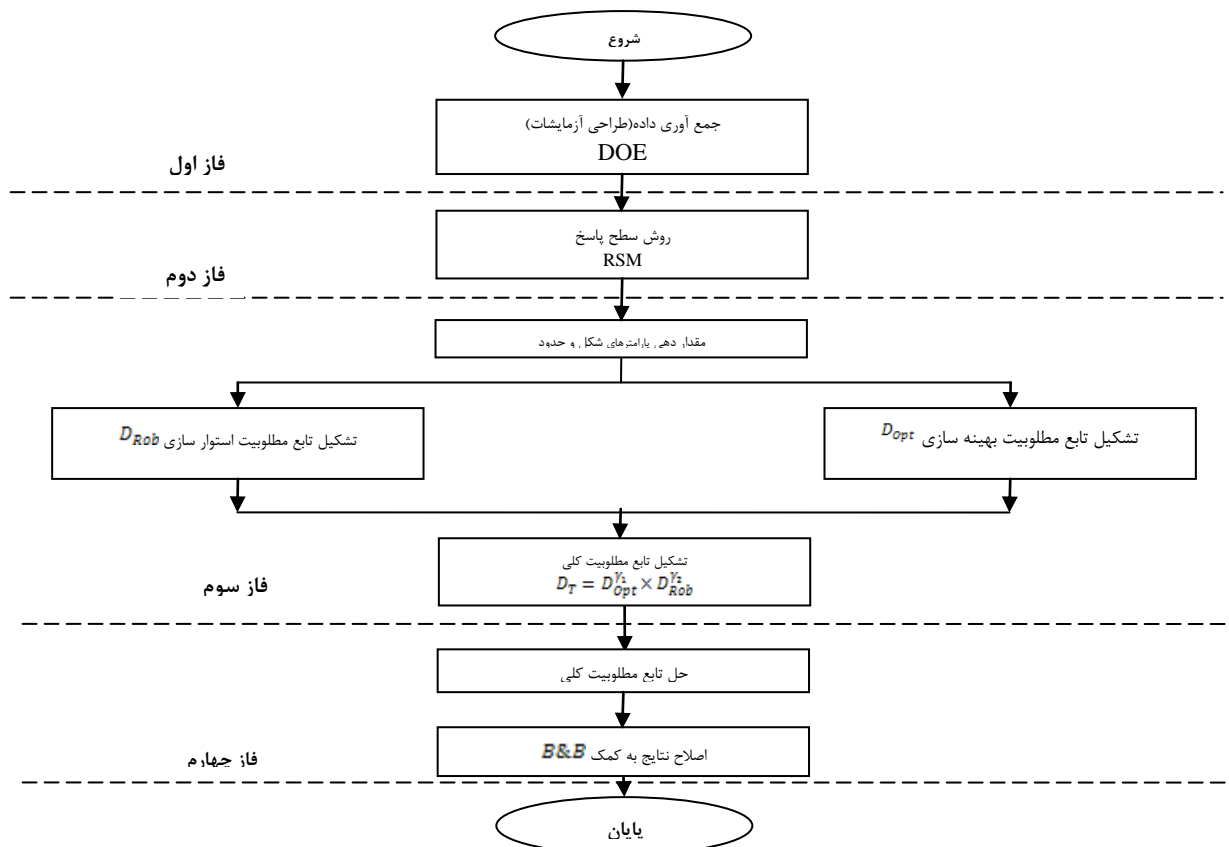
s.t.:

$$D_{Opt} = \prod_{i=1}^k d_i(\hat{y}_i(x))^{w_i}$$

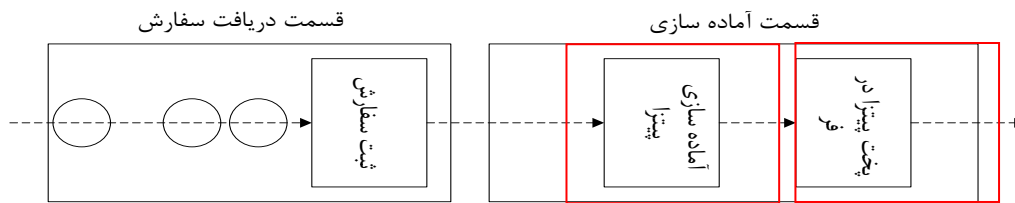
$$D_{Rob} = \prod_{i=1}^k d_{\sigma_i}(\hat{y}_{\sigma_i}(x))^{w_i}$$

$$Y_1 + Y_2 = 1$$

$$x \in \Omega$$



شکل ۱. دیگرام رویکرد پیشنهادی تابع تجمیع اصلاح شده



شکل ۲. ساختار کلی سیستم شبکه صف پیتزا فروشی

همانطور که در شکل ۲ مشهود است قسمت آماده کردن سفارشات درخواستی از دو ایستگاه کاری تشکیل شده است که در ایستگاه اول کارگران به آماده سازی پیتزا می پردازند و سپس در ایستگاه دوم پیتزا در فر پخت می گردد. از اینرو شبکه صفی متشکل از سه ایستگاه کاری داریم. میزان سفارش دهی مشتریان احتمالی بوده و همچنین بر اساس اینکه منوی غذایی شامل چه انواعی از پیتزا می باشد، مشتریان بطور احتمالی نوع پیتزای درخواستی را مشخص می نمایند. جدول ۱ و ۲ به ترتیب احتمالات مربوط به پیتزای سفارشی و نوع سفارش را نشان می دهند.

### ۳. مثال عددی

در این قسمت به منظور نمایش کاربردپذیری، روش بهینه سازی پیشنهادی بر اساس تابع مطلوبیت اصلاح شده را برای سیستم صف یک پیتزا فروشی به کار می بریم.

#### ۳-۱. تعریف مساله

سیستم صف یک پیتزا فروشی متشکل از دو قسمت کلی را در نظر می گیریم. در قسمت اول مشتریان در یک صف با یک سرویس دهنده به سفارش غذا می پردازند و در قسمت دوم سفارشات درخواستی آماده می گردد. ساختار کلی سیستم صف در شکل ۲ نمایش داده شده است.

جدول ۱. احتمالات مربوط نحوه ورود مشتریان به سیستم

میزان سفارش دهی	جمع										
	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	
احتمال سفارش دهی	۰,۰۵	۰,۰۵	۰,۰۵	۰,۲	۰,۲	۰,۲	۰,۱	۰,۰۵	۰,۰۵	۰,۰۵	۱

بطور مثال در جدول ۱ مشتریان با احتمال ۰,۱، ۷ عدد پیتزا با احتمال های ۰,۲، ۴,۵,۶، پیتزا سفارش می دهند.

جدول ۲. احتمالات مربوط نحوه سفارش دهی

	پیتزای نوع اول	پیتزای نوع دوم	پیتزای نوع سوم	پیتزای نوع چهارم	جمع
احتمالات سفارش دهی منوی اول	۱	-	-	-	۱
احتمالات سفارش دهی منوی دوم	۰,۵	۰,۵	-	-	۱
احتمالات سفارش دهی منوی سوم	۰,۶	۰,۲	۰,۲	-	۱
احتمالات سفارش دهی منوی چهارم	۰,۵	۰,۲	۰,۱۵	۰,۱۵	۱

۰,۱۵ پیتزای نوع ۴ را انتخاب می کنند. به علاوه مشتریان در زمان مشاهده ۱۵ نفر در صف از ورود به سیستم، انصراف می دهند. پارامترهای مورد استفاده در این سیستم صف در جدول ۳ نمایش داده شده است.

همانطور که در جدول ۲ مشهود است ۴ نوع منوی غذایی وجود دارد که بر اساس اینکه چه نوع غذایی از طرف رستوران ارائه می شود مشتریان با احتمال های مختلف به انتخاب نوع پیتزای مورد نظر می پردازند. بطور مثال اگر رستوران منوی غذایی چهارم را ارائه دهد مشتریان با احتمال ۰,۵ پیتزای نوع اول و با احتمال

جدول ۳. پارامترهای موجود در شبکه صف

توضیحات	میانگین توزیع (ثانیه)	تابع توزیع
زمان بین دو ورود مشتریان به سیستم	۱۲۰	نمایی
زمان سرویس دهی در ایستگاه اول	۴۸	ثابت
زمان سرویس دهی در ایستگاه دوم	۱۵۰	یکنواخت
زمان سرویس دهی در ایستگاه سوم	۹۰۰	ثابت
زمان سرویس دهی در ایستگاه سوم	۱۲۰۰	ثابت
زمان سرویس دهی در ایستگاه سوم	۱۸۰۰	ثابت
زمان سرویس دهی در ایستگاه سوم	۲۷۰۰	ثابت



برای جمع آوری داده ها، طرح آزمایشی فاکتوری کامل با ۴ تکرار بکار رفته است که بر طبق آن متغیر  $x_1$  دارای ۴ سطح، متغیر  $x_2$  دارای ۲ سطح و متغیر  $x_3$  دارای ۳ سطح می باشند. برای تشکیل فضای شدنی در حالت کد شده<sup>۴</sup> دامنه متغیرهای  $(x_i; i = 1, 2, 3)$  در بازه  $[-1, 1]$  تعریف شده است. توابعی که متغیرها را از فضای واقعی به فضای کد شده می برند در معادلات (۱۳) تا (۱۵) مشهود هستند.

$$x_1(\text{coded}) = \frac{x_1 - 62.5}{110 - 15} \quad (13)$$

$$x_2(\text{coded}) = \frac{x_2 - 6}{8 - 4} \quad (14)$$

$$x_3(\text{coded}) = \frac{x_3 - 80}{100 - 60} \quad (15)$$

در معادلات (۱۳) تا (۱۵) مخرج کسرها از رابطه  $\frac{x_{\text{upper}} - x_{\text{lower}}}{2}$  و صورت کسرها از رابطه  $\frac{x_{\text{upper}} + x_{\text{lower}}}{2}$  بدست می آیند. در اینجا لازم بذکر است که حد بالای متغیر  $x_1$  (که مربوط به تنوع منوی غذایی می باشد) از حاصل جمع مربوط به زمان های پخت منوی غذایی چهارم حاصل شده است، و حد پایین آن برابر زمان پخت مربوط به منوی غذایی اول (که دارای یک نوع پیتزا است) می باشد. جدول ۵ نشان دهنده سطوح آزمایش به همراه میانگین اهداف و انحراف استاندارد هر کدام از آن ها است.

### ۳-۳. متدولوژی متغیر سطح پاسخ

در این مرحله از رویکرد پیشنهادی با استفاده از روش متغیر سطح پاسخ بهترین معادلات رگرسیونی که روابط بین هر یک از اهداف شامل به کارگیری کارگران  $(\hat{y}_1(x))$ ، به کارگیری فر  $(\hat{y}_2(x))$ ، مدت زمان انتظار مشتریان در صف  $(\hat{y}_3(x))$  و انحراف استاندارد مربوط به آنها  $(\sigma_1(x))$ ، با هر یک از متغیرهای تصمیم شامل تنوع منوی غذایی  $(x_1)$ ، تعداد کارگران  $(x_2)$ ، و ظرفیت فر  $(x_3)$  در بهترین شرایط برآورد شده است. نتایج در (۱۶) تا (۲۱) بیان گشته اند.

بر اساس تعاریف صورت پذیرفته می توان گفت که سیستم صف این پیتزا فروشی یک شبکه صف سری بسته ۳ ایستگاهی با شرایط انصراف<sup>۱</sup> است. در این سیستم متغیرهای پاسخ مورد نظر: به کارگیری کارگران (بکارگیری سرویس دهنده در ایستگاه دوم)  $(\hat{y}_1(x))$ ، به کارگیری فر (به کارگیری سرویس دهنده در ایستگاه سوم)  $(\hat{y}_2(x))$ ، مدت زمان انتظار مشتریان در صف  $(\hat{y}_3(x))$ ، تعریف می شوند و متغیرهای تصمیم: منوی غذایی که از طرف رستوران ارائه می شود  $(x_1)$ ، تعداد کارگران  $(x_2)$ ، و ظرفیت فر  $(x_3)$  می باشند. دامنه متغیرهای تصمیم در جدول شماره ۴ آمده است.

جدول ۴. حدود متغیرهای تصمیم

واحد	حد بالا	حد پایین
نوع	۴	۱
نفر	۸	۴
پیتزا	۱۰۰	۶۰

تجزیه و تحلیل این سیستم صف برای بررسی معیارهای ارزیابی آن، نظیر متوسط زمان انتظار مشتریان در صف<sup>۲</sup> و به کارگیری سرویس دهنده ها<sup>۳</sup> امری پیچیده و دشوار است، زیرا تابع احتمال سرویس دهی سرویس دهندگان نمایی نمی باشد و به علاوه مشتریان طبق احتمال های گوناگون به سفارش دهی می پردازند. با توجه به این، شرایط بهینه سازی این شبکه صف بر طبق روش های موجود امری دشوار است و تعیین مقادیر بهینه برای شبکه های صف با انصراف تنها در موارد خاص که دارای ۲ ایستگاه هستند و شبکه برگشت پذیر است امکان دارد (Baskett et al., Kelly, 1975). از اینرو بر اساس رویکرد پیشنهادیمان مسئله را حل می نماییم.

### ۳-۲. طراحی آزمایش ها (DOE)

اولین گام از رویکرد پیشنهادی برای بهینه سازی سیستم صف تشریح شده در قسمت قبل، طراحی آزمایش ها می باشد. برای این منظور سیستم صف رستوران، با استفاده از نرم افزار شبیه سازی GPSS World Student Version 5.2.2 شبیه سازی شده است، زیرا همانطور که اشاره شد تشریح سیستم نیازمند روابط پیچیده ریاضی است.

<sup>1</sup> Queueing Network Model(QNM) with Blocking

<sup>2</sup> Lead Time

<sup>3</sup> Utilisation

<sup>4</sup> Coded

جدول ۵. داده های مربوط به طرح آزمایش فاکتوری کامل

U	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_1(x)$	$y_2(x)$	$y_3(x)$	$y_{\sigma_1}(x)$	$y_{\sigma_2}(x)$	$y_{\sigma_3}(x)$
1	1	-1	-1	0.95175	0.5825	12.19325	0.002061553	0.012369317	1.52615429
2	1	-1	0	0.95425	0.488	10.53975	0.012841988	0.047391982	1.274508108
3	1	-1	1	0.96075	0.39575	9.198	0.01192686	0.039802638	0.952655587
4	1	1	-1	0.82	0.72775	25.938	0.047644517	0.046743092	1.660564161
5	1	1	0	0.85125	0.709	20.76875	0.031127426	0.013190906	1.038507061
6	1	1	1	0.8555	0.66575	16.79225	0.051571956	0.027944886	1.35199023
7	0.053	-1	-1	0.937	0.50225	13.35325	0.031464265	0.103154819	1.254408592
8	0.053	-1	0	0.9345	0.45525	9.323	0.023345235	0.055685875	1.84574917
9	0.053	-1	1	0.9485	0.4045	8.83475	0.037793297	0.077702424	1.829562311
10	0.053	1	-1	0.83225	0.75775	25.48775	0.054020829	0.015777093	2.278861759
11	0.053	1	0	0.79675	0.70825	18.924	0.076312406	0.033777458	1.646739607
12	0.053	1	1	0.671	0.69075	12.89	0.056361926	0.043622433	2.186878293
13	-0.579	-1	-1	0.9435	0.551	14.9185	0.029354159	0.040963398	1.310576082
14	-0.579	-1	0	0.9545	0.4715	11.9435	0.029331439	0.078368786	2.685235744
15	-0.579	-1	1	0.93875	0.37075	9.67425	0.0239496	0.042169302	1.869239841
16	-0.579	1	-1	0.703	0.74525	25.09375	0.047902679	0.022691775	2.124327717
17	-0.579	1	0	0.7975	0.70825	20.61675	0.062803928	0.025421448	1.491098337
18	-0.579	1	1	0.8865	0.6745	15.06075	0.027970222	0.018083141	2.147969021
19	-1	-1	-1	0.95375	0.55275	13.37275	0.010404326	0.03173195	1.795568132
20	-1	-1	0	0.966	0.44425	10.11025	0.00391578	0.062755478	2.871089384
21	-1	-1	1	0.9665	0.3825	8.862	0.009949874	0.073400727	3.472008353
22	-1	1	-1	0.716	0.7605	24.739	0.039285281	0.036391391	2.87172631
23	-1	1	0	0.78025	0.716	19.61225	0.046449794	0.013638182	2.414563919
24	-1	1	1	0.84175	0.6845	16.3725	0.013175103	0.022575798	2.79255373

$$\hat{y}_1(x) = 0.864741 + 0.011292x_1 - 0.075516x_2 + 0.010677x_3 + 0.027577x_1^2 + 0.014454x_1x_2 - 0.019564x_1x_3 + 0.009687x_2x_3 \quad (۱۶)$$

$$\hat{y}_2(x) = 0.584274 + 0.121440x_2 - 0.056714x_3 - 0.010356x_1x_2 + 0.022453x_2x_3 \quad (۱۷)$$

$$\hat{y}_3(x) = 14.9101 + 4.6303x_2 - 3.5719x_3 + 0.5406x_2^2 + 0.5690x_3^2 + 0.3662x_1x_2 - 1.4296x_2x_3 \quad (۱۸)$$

$$\hat{y}_{\sigma_1}(x) = 0.049611 + 0.002868x_1 + 0.014109x_2 - 0.023042x_1^2 - 0.004839x_3^2 + 0.003275x_1x_2 + 0.005687x_1x_3 - 0.003132x_2x_3 \quad (۱۹)$$

$$\hat{y}_{\sigma_2}(x) = 0.050080 - 0.013574x_2 - 0.015508x_1^2 + 0.006297x_1x_2 \quad (۲۰)$$

$$\hat{y}_{\sigma_3}(x) = 1.68332 - 0.63073x_1 + 0.24323x_1^2 - 0.28172x_1x_3 - 0.16830x_2x_3 \quad (۲۱)$$

### ۳-۴. رویکرد تابع مطلوبیت

پس از بدست آوردن  $\hat{y}_i(x)$  و  $\hat{y}_{\sigma_i}(x)$  رویکرد تابع مطلوبیت اصلاح شده برای تجمیع اهداف به شرح زیر بیان می شود.

#### ۳-۴-۱. مقدار دهی اولیه پارامترها

اولین قدم در تعریف تابع مطلوبیت تعیین نمودن مقادیر پارامترهای شکل و حدود مربوط به هر یک از اهداف و انحراف استاندارد مربوط به آنها می باشد.

اهداف موجود در این شبکه صف از نوع ۲ LTB, STB می باشند که متغیرهای  $\hat{y}_1(x)$ ,  $\hat{y}_2(x)$  از نوع LTB و متغیرهای  $\hat{y}_3(x)$

$\hat{y}_{\sigma_1}(x)$ ,  $\hat{y}_{\sigma_2}(x)$ ,  $\hat{y}_{\sigma_3}(x)$  از نوع STB هستند، از اینرو برای تعریف تابع مطلوبیت، بایستی از تبدیل یک طرفه استفاده نمود که پارامترهای مورد نیاز در آن شامل  $r_i, y_i^{max}, y_i^{min}, y_i^{max}, y_i^{min}$  می باشد. مقادیر مناسب  $y_i^{min}, y_i^{min}$  از طریق به ترتیب مینیمم سازی  $\hat{y}_i(x)$  و  $\hat{y}_{\sigma_i}(x)$  و مقادیر مناسب  $y_i^{max}, y_i^{max}$  از طریق به ترتیب ماکزیمم سازی  $\hat{y}_i(x)$  و  $\hat{y}_{\sigma_i}(x)$  بدست آمده اند. در اینجا لازم به ذکر است که مقادیر بدست آمده بر طبق نظر DM اصلاح شده اند. جدول ۶ نشان دهنده مقادیر مربوط به حدود اهداف و انحراف استاندارد آنها است.

جدول ۶. مقادیر مربوط به حدود اهداف و انحراف استاندارد آنها

	$V_{\mu_1}^{standard}$	$V_{\mu_2}^{standard}$	$V_{\mu_3}^{standard}$	$V_{\sigma_1}^{standard}$	$V_{\sigma_2}^{standard}$	$V_{\sigma_3}^{standard}$
$\hat{y}_1(x)$	۰.۸	۱	-	-	-	-
$\hat{y}_2(x)$	۰.۴۵	۱	-	-	-	-
$\hat{y}_3(x)$	۵دقیقه	۲۰دقیقه	-	-	-	-
$\hat{y}_{\sigma_1}(x)$	-	-	۰	۰.۰۵	-	-
$\hat{y}_{\sigma_2}(x)$	-	-	۰	۰.۰۵	-	-
$\hat{y}_{\sigma_3}(x)$	-	-	۱	-	-	۲

$$d_2(y_2(x)) = \begin{cases} 0 & \hat{y}_2(x) < 0.45 \\ \left(\frac{\hat{y}_2(x) - 0.45}{1 - 0.45}\right)^1 & 0.45 < \hat{y}_2(x) < 1 \\ 1 & \hat{y}_2(x) \geq 1 \end{cases} \quad (23)$$

$$d_3(y_3(x)) = \begin{cases} 1 & \hat{y}_3(x) < 5 \\ \left(\frac{\hat{y}_3(x) - 20}{5 - 20}\right)^1 & 5 < \hat{y}_3(x) < 20 \\ 0 & \hat{y}_3(x) > 20 \end{cases} \quad (24)$$

$$d_{\delta_3}(y_{\delta_3}(x)) = \begin{cases} 1 & \hat{y}_{\sigma_3}(x) < 1 \\ \left(\frac{\hat{y}_{\sigma_3}(x) - 2}{1 - 2}\right)^5 & 1 < \hat{y}_{\sigma_3}(x) < 2 \\ 0 & \hat{y}_{\sigma_3}(x) > 2 \end{cases} \quad (25)$$

$$d_{\delta_2}(y_{\delta_2}(x)) = \begin{cases} 1 & \hat{y}_{\sigma_2}(x) < 0 \\ \left(\frac{\hat{y}_{\sigma_2}(x) - 0.05}{0 - 0.05}\right)^2 & \hat{y}_{\sigma_2}(x) < 0.05 \\ 0 & \hat{y}_{\sigma_2}(x) > 0.05 \end{cases} \quad (26)$$

$$d_{\delta_3}(y_{\delta_3}(x)) = \begin{cases} 1 & \hat{y}_{\sigma_3}(x) < 1 \\ \left(\frac{\hat{y}_{\sigma_3}(x) - 2}{1 - 2}\right)^5 & 1 < \hat{y}_{\sigma_3}(x) < 2 \\ 0 & \hat{y}_{\sigma_3}(x) > 2 \end{cases} \quad (27)$$

صف تاثیر بسزایی بر این امر دارد، وزن مربوط به این هدف  $(y_3(x))$  بزرگتر از دو هدف دیگر انتخاب شده است. وزن به کارگیری کارگران  $(y_1(x))$  و به کارگیری فر  $(y_2(x))$  بر اساس نظر DM مساوی انتخاب شده اند.

#### ۳-۴-۴. تشکیل تابع مطلوبیت استوارسازی ( $D_{Rob}$ )

یکی از مهمترین ویژگی های رویکرد پیشنهادی برای بهینه سازی شبکه های صف، در نظر گرفتن انحراف استاندارد اهداف به عنوان عاملی جهت کمینه کردن تغییرات و بالا بردن استوارسازی مساله است. از اینرو در این قسمت  $D_{Rob}$  طبق معادله (۲۹) نشان داده شده است.

برای تعیین پارامتر شکل با انتخاب  $r_3 = 1$ ,  $r_2 = 1$ ,  $r_1 = 0.1$  برای اهداف و  $r_3 = 5$ ,  $r_2 = 2$ ,  $r_1 = 2$  برای انحراف استاندارد سعی نمودیم تا به نحوی مناسب علاقه مندی مربوط به هر یک از آنها را در تعریف تابع مطلوبیت کلی بیان کنیم.

#### ۳-۴-۲. تشکیل مقادیر مطلوبیت

پس از مقداردهی اولیه به پارامترهای شکل و حدود می توانیم مقادیر مطلوبیت مربوط به اهداف  $d_i(\hat{y}_i(x))$  و انحراف استاندارد  $d_{\sigma_i}(\hat{y}_{\sigma_i}(x))$  را تعریف نماییم. همانگونه که در قسمت قبلی اشاره شد اهداف و انحراف استاندارد مربوط به آنها از هر دو نوع LTB, STB می باشند لذا بایستی از تبدیل یک طرفه استفاده نمود. مقادیر مطلوبیت مربوط به هر یک از آن موارد در (۲۲) تا (۲۷) آمده اند.

$$d_1(y_1(x)) = \begin{cases} 0 & \hat{y}_1(x) < 0.8 \\ \left(\frac{\hat{y}_1(x) - 0.8}{1 - 0.8}\right)^{0.1} & 0.8 < \hat{y}_1(x) < 1 \\ 1 & \hat{y}_1(x) \geq 1 \end{cases} \quad (22)$$

#### ۳-۴-۳. تشکیل تابع مطلوبیت بهینه سازی ( $D_{Opt}$ )

با تعیین مقادیر مطلوبیت متغیرهای پاسخ می توان تابع مطلوبیت بهینه سازی،  $D_{Opt}$  را بدست آورد. این تابع را نشان می دهد.

$$D_{Opt} = d_1(y_1(x))^{0.25} \times d_2(y_2(x))^{0.25} \times d_3(y_3(x))^{0.5} \quad (28)$$

انتخاب مقادیر مربوط به توان های مقادیر مطلوبیت براساس درجه اهمیت است و از آنجایی که جلب رضایت مشتریان یکی از مهمترین اهداف هر سیستم خدماتی می باشد و زمان انتظار در

مقدار بهینه برابر ۶ گردید. مقادیر بهینه اهداف و انحراف استاندارد آنها، در جدول ۷ نشان داده شده است.

شرایط بهینه طراحی سیستم صف مربوط به پیتزا فروشی بر اساس رویکرد تابع مطلوبیت اصلاح شده، حاکی از آن است که منوی غذایی ۴ (که حاوی تمامی انواع پیتزا می باشد) بایستی به مشتریان پیشنهاد داده شود، به علاوه تعداد کارگران موجود بایستی ۶ نفر باشند و فر نیز در حداکثر ظرفیت خود یعنی ۱۰۰ تنظیم شود.

براین اساس، متوسط زمان انتظار افراد در صف ۱۲,۴ دقیقه بدست می آید که عددی منطقی است و به کارگیری کارگران ۰,۹ می شود که نشان می دهد کارگران در ۹۰ درصد اوقات مشغول به کار می باشند و این امر برای DM بسیار حائز اهمیت است.

به کارگیری فر ۰,۵۳ بدست آمده است که نشان می دهد فر در ۵۳ درصد اوقات مشغول بکار است که از حد مناسب خود فاصله دارد، اما می توان دید که مقدار بهینه انحراف استاندارد مدت زمان انتظار تقریباً در سطح پایین خود بوده و مقادیر انحراف استاندارد دو هدف دیگر نیز در حدی مناسب می باشند. به جز مقدار به کارگیری فر که در حدی متوسط است تمامی نتایج بدست آمده برای اهداف و انحراف استاندارد آنها بسیار مناسب می باشد و حاکی از آن است که رویکرد تابع مطلوبیت اصلاح شده به خوبی در بهینه سازی این شبکه صف عمل نموده و به طوری متعادل همگی اهداف را ارضا کرده است.

### ۳-۶. اهمیت تعریف تابع مطلوبیت استوار سازی

به منظور درک بهتر توانایی تابع مطلوبیت استوار سازی در بهینه سازی شبکه صف مذکور، یکبار دیگر این سیستم را در شرایطی که تابع مطلوبیت کل فقط از  $D_{Opt}$  تشکیل شده است، حل نمودیم.

براین اساس  $x_1 = -0.380, x_2 = 0.426, x_3 = 1$  بدست آمدند که پس از بکار گیری الگوریتم انشعاب و تحدید بر روی متغیر های  $x_1, x_2, x_3$ ، مقادیر بهینه  $x_i$  ها (در شرایط واقعی) نشان می دهد که بایستی منوی غذایی دوم به مشتریان ارائه شود و تعداد مناسب کارگران ۷ عدد می باشد. به علاوه ظرفیت مناسب برای فر ۱۰۰ می باشد. بر اساس نتایج حاصل، مقادیر بهینه اهداف و انحراف استاندارد آنها در جدول ۸ ارائه شده است.

از آنجایی که کمینه کردن انحراف استاندارد ها به عنوان عاملی جهت حفظ پایداری مدل اهمیت دارد وزن های مربوط به مقادیر مطلوبیت استوار سازی به طور مساوی انتخاب شده اند.

### ۴-۴-۵. تشکیل تابع مطلوبیت کل ( $D_T$ )

با حاصل شدن توابع مطلوبیت بهینه سازی و استوار سازی، تابع مطلوبیت کل ( $D_T$ ) از طریق معادله (۲۹) بدست می آید.

$$D_{Opt} = d_1(y_1(x))^{0.25} \times d_2(y_2(x))^{0.25} \times d_3(y_3(x))^{0.5} \quad (29)$$

$$D_T = D_{Opt}^{0.5} \times D_{Rob}^{0.5} \quad (30)$$

در اینجا مقادیر  $y_1, y_2$  برابر ۰,۵ انتخاب شده اند زیرا همزمان هم اهداف و هم انحراف استاندارد آنها دارای اهمیت مساوی هستند.

### ۳-۵. بهینه سازی تابع مطلوبیت کل

با توجه به شکل تابع مطلوبیت کل، به منظور دست یابی به یک جواب مناسب و نزدیک به بهینه از الگوریتم حرکت دسته جمعی ذرات<sup>۱</sup> (PSO) استفاده کردیم و برای پیاده سازی، این الگوریتم را در نرم افزار MATLAB version 7.8.0347(R2009a) کد نمودیم. الگوریتم حرکت دسته جمعی ذرات از رفتار اجتماعی ارگانیزم های طبیعی نظیر حرکت پرندگان و ماهیان، در پیدا کردن مکانی حاوی غذای کافی پیروی می کند و برای مسائل بهینه سازی پیوسته بسیار کاربرد دارد و به خوبی عمل می نماید (Talbi, 2009).

با توجه به ویژگی های ذکر شده این الگوریتم فرابتناری، آن را برای بهینه سازی تابع مطلوبیت خود بکار بردیم. بر اساس نتایج حاصل از الگوریتم مقادیر بهینه  $x_i$  ها به صورت  $x_1 = 1, x_2 = 0.0838, x_3 = 1$  حاصل شدند که مقدار تابع مطلوبیت مربوط به آن ۰,۳۲۵۴ شد. با تبدیل مقادیر کد شده مربوط به  $x_i$  ها به مقادیر واقعی، مقدار بهینه مربوط به تنوع غذایی ( $x_1$ ) برابر منوی چهارم بدست آمد و مقدار بهینه اندازه فر ( $x_2$ ) در حد بالای خود یعنی ۱۰۰ حاصل شد.

همچنین مقدار بهینه تعداد کارگران ۶,۱۶۷۶ بدست آمد که به منظور تعیین اندازه درست با استفاده از روش انشعاب و تحدید

<sup>1</sup> Particle swarm optimization

جدول ۷. مقادیر بهینه اهداف و انحراف استانداردهای آنها

	$\hat{y}_1(x)$	$\hat{y}_2(x)$	$\hat{y}_3(x)$	$\hat{y}_{\sigma_1}(x)$	$\hat{y}_{\sigma_2}(x)$	$\hat{y}_{\sigma_3}(x)$
$x_1 = 1$						
$x_2 = 0$	۰,۸۹۴۷	۰,۵۲۷۶	۱۲,۴۴۷۸ دقیقه	۰,۰۳۰۳	۰,۰۳۰۶	۱,۰۱۴۱
$x_3 = 1$						

جدول ۸. مقادیر بهینه اهداف و انحراف استاندارد آنها برای حل بدون در نظرگیری تابع استوارسازی

	$\hat{y}_1(x)$	$\hat{y}_2(x)$	$\hat{y}_3(x)$	$\hat{y}_{\sigma_1}(x)$	$\hat{y}_{\sigma_2}(x)$	$\hat{y}_{\sigma_3}(x)$
$x_1 = -0.67$						
$x_2 = 0.5$	۰,۸۵۴۷	۰,۶۰۲۹	۱۳,۶۱۵۴ دقیقه	۰,۰۳۴۰	۰,۰۳۴۸	۲,۲۹۱۳
$x_3 = 1$						

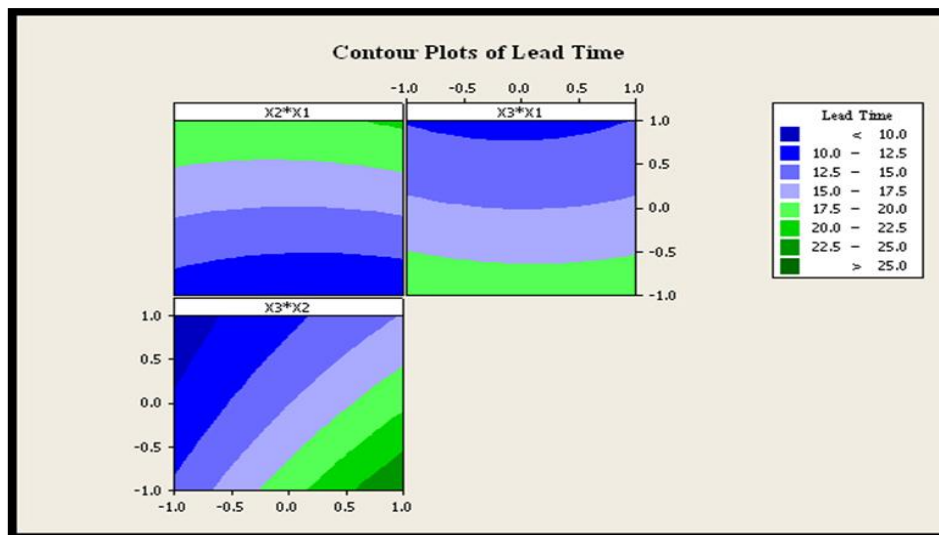
کاملاً اشتباه است و باعث ضعیف شدن مدل می گردد. از اینرو رویکرد پیشنهادی ضمن توانایی خوب در بهینه سازی سیستم صف (با در نظر گرفتن عامل استوار سازی)، از تغییرات تأثیر گذار بر شرایط بهینگی جلوگیری می نماید و اعتبار سیستم طراحی شده را افزایش می دهد.

#### ۴. بررسی بیشتر

در این قسمت می خواهیم به این سوال پاسخ دهیم که، اگر DM سعی بر حداقل کردن مقدار زمان انتظار مشتری به عنوان یکی از مهمترین پارامترها در بحث رقابت و جلب رضایت داشته باشد، مقادیر مناسب برای متغیرهای تصمیم بایستی چگونه انتخاب شوند؟ در شکل های ۳ و ۴ خطوط کانتور برای اهداف زمان انتظار مشتری  $\hat{y}_3(x)$  و همچنین انحراف استاندارد زمان انتظار مشتری یعنی  $\hat{y}_{\sigma_3}(x)$  رسم شده اند.

همانطور که از نتایج مربوط به جدول مشهود است به جز به کارگیری فر که به اندازه ۰,۰۷ افزایش یافته است، همگی اهداف بدتر از مقادیر قبلی خود شده اند به خصوص در مورد مدت زمان انتظار و انحراف استاندارد مربوط به آن اثر بسیار بدی در عدم وجود تابع استوارسازی بر اهداف حاصل شده است، و عملاً انحراف استاندارد زمان انتظار از حد پایین خود در بهینه سازی قبلی (۱,۰۱۴۱) به حد بالا (۲,۲۹۱۳) در بهینه سازی بدون در نظر گرفتن معیار استوارسازی منتقل گشته است.

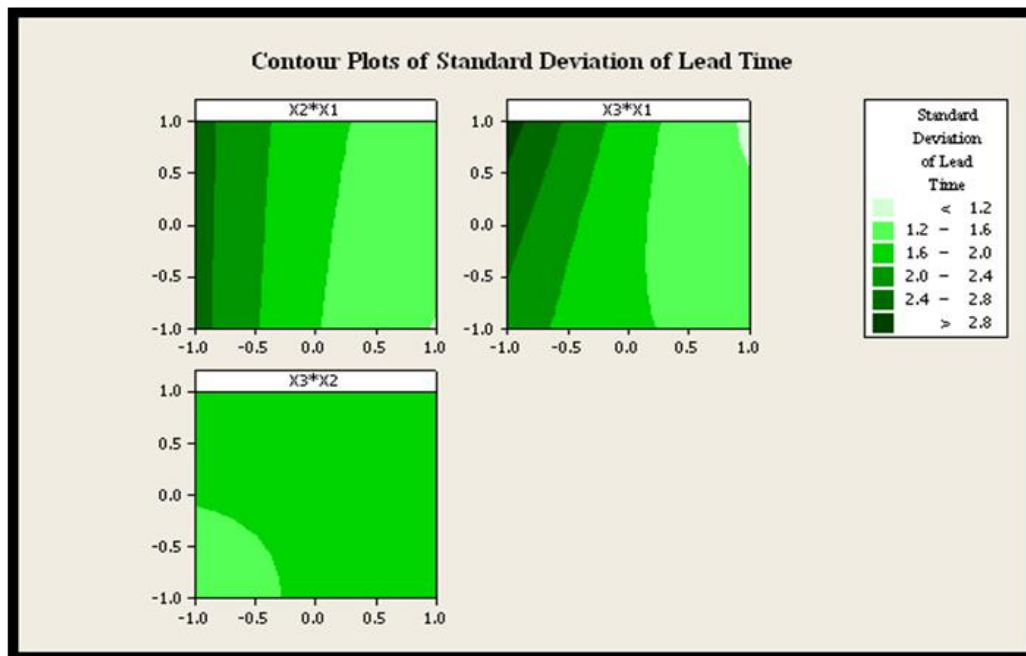
به کارگیری نیروی انسانی نیز به اندازه ۰,۰۴ بدتر از حالت قبل بدست آمده است و مقادیر  $\hat{y}_{\sigma_2}(x)$  و  $\hat{y}_{\sigma_1}(x)$  به اندازه ناچیزی بدتر شده اند. از مقایسه دو طریق حل مساله شبکه صف می توان نتیجه گیری کرد که عدم توجه به معیار استوارسازی در زمان بهینه سازی، می تواند اثر بسیار بدی بر تغییرات بگذارد که نمونه بارز آن را در زمان انتظار مراجعین به سیستم به عنوان یکی از مهمترین پارامترها در جلب رضایت مشتریان مشاهده نمودیم. لذا اینکه فرض کنیم اهداف دارای انحراف استاندارد مساوی هستند



شکل ۳. خطوط کانتور برای زمان انتظار مشتریان

پایینی خود انتخاب شوند. نتایج بدست آمده با نتایج مربوط به رویکرد بهینه سازی تابع مطلوبیت اصلاح شده که در قسمت قبلی ارائه شد کاملاً مطابق است و مشخص می کند که این روش به نحوی مناسب به بهینه سازی سیستم شبکه صف پرداخته است. (سیستمی که دارای پیچیدگی های ذاتی زیادی است و تنها مدل سازی ریاضی آن کاری بسیار دشوار می باشد!)

همانطور که در شکل ۳ مشهود است مقدار بهینه (حداقل زمان انتظار) برای متغیر  $\hat{y}_3(x)$  زمانی حاصل می گردد که متغیرهای  $x_1, x_3$  در سطح بالای خود و متغیر  $x_2$  در سطح میانی خود باشند. همچنین شکل ۴ حاکی از آن است که برای حداقل کردن انحراف استاندارد زمان انتظار مشتری،  $\hat{y}_{\sigma_3}(x)$  بایستی متغیرهای  $x_1, x_3$  در سطح بالای خود و متغیر  $x_2$  در سطح



شکل ۴. خطوط کانتور برای انحراف استاندارد زمان انتظار مشتریان

## ۵. نتیجه گیری

تکنیک های موجود در ادبیات شبکه های صف، صرفاً یا به تجزیه و تحلیل سیستم های تحت مطالعه می پردازند و یا در صورت بهینه سازی نیز سیستم را تک هدفه فرض می نمایند. این مطالعه یک تابع مطلوب اصلاح شده برای بهینه سازی استوار شبکه های صف ارائه می نماید. روش پیشنهادی علاوه بر آنکه بطور هم زمان به مینیم سازی زمان انتظار مشتری و ماکزیمم سازی به کارگیری سرویس دهنده می پردازد حساسیت اهداف به فاکتور های اختلال را به حداقل ممکن می رساند. ویژگی مهم دیگر رویکرد پیشنهادی آن است که قرار گرفتن همه اهداف، در ناحیه مطلوب DM را تضمین می کند. در نهایت به منظور اعتبارسنجی رویکرد پیشنهادی، مدل شبکه صف یک پیتزا فروشی را بهینه کردیم و علاوه بر ترسیم توانایی های رویکرد ارائه شده نشان دادیم که عدم تعریف معیار استوار سازی تا چه اندازه می تواند بر تفسیر نتایج تاثیر منفی بگذارد.

## مراجع

- [۱] مدرس یزدی، محمد، «نظریه صف»، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، صفحه ۲۵۰-۱۹۰، ۱۳۷۰.
- [۲] فردریک س. هیلبر؛ جerald لیبرمن، «تحقیق در عملیت: برنامه ریزی ریاضی»، ترجمه محمد مدرس و اردوان آصف وزیری، جلد ۲، صفحه ۱۶۴-۱۳۱، ۱۳۸۱.
- [3] Awan, I., B. Ahmad, et al., "Performance Analysis of networks of Queues Under Active Queue Management Scheme." Simulation Modelling Practice and Theory 15: 2007, pp. 416-425.
- [4] Baskett, F., K. M. Chandy, et al., "Closed and Mixed Networks of Queues with Different Classes of Customers." J. ACM 22(2): 1975, pp.248-260.
- [5] Bhaskar, V., Lallement. P., "Modeling a supply chain using a network of queues Vidhyacharan Bhaskar." Applied Mathematical Modelling 34: 2010, pp. 2074-2088.

- [20] Montgomery, D.C., *Design and Analysis of Experiments*, John Wiley & Sons, 2005.
- [21] Talbi, E.G., *Metaheuristics from Design to Implementation*. New Jersey, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, 2009.
- [22] Ye, T., "Queueing Network Analysis on Dynamic Lot Streaming." *Computers & Operations Research* 36: pp. 415 – 424.
- [6] Cruz, F.R.B., Duarte, A.R., et al. "Buffer Allocation in General Single-Server Queueing Networks." *Computers & Operations Research* 35: 2008, pp. 3581 – 3598.
- [7] Derringer, G., "A Balancing Act: Optimizing a Product's Properties." *Quality Progress* 21: 1994, pp. 51-57.
- [8] DERRINGER, G., SUICH, R., "Simultaneous Optimization of Several Response Variables." *Journal of Quality Technology* 12: 1980, pp. 214-219.
- [9] GATZA, P.E., MCMILLAN, R.C., "The Use of Experimental Design and Computerized Data Analysis in Elastomer Development Studies," Division of Rubber Chemistry." *American Chemical Society Fall Meeting* 6. 1972.
- [10] Hachicha, W., Masmoudi, F., et al. "Case Study for Lot-Sizing Problem in Mto Supply Chain Based on Simulation Optimization Approach" 8th International Conference of Modeling and Simulation- MOSIM'10 - May 10-12, 2010 - Hammamet - Tunisia "Evaluation and optimization of innovative production systems of goods and services" 2010.
- [11] Jeong, I.J., Kim, K.J., "An Interactive Desirability Function Method to Multiresponse Optimization." *European Journal of Operational Research* 195: 2009, pp. 412–426.
- [12] Joseph, E., Harrington, J., "The Desirability Function." *Industrial Quality Control* 21: 1965, pp. 494–498.
- [13] Kelly, F.P., "Reversibility and Stochastic Networks, New York." John Wiley., 1975
- [14] Kim, K.J., Lin, D.K.J. "Dual Response Surface Optimization: A Fuzzy Modeling Approach." *Journal of Quality Technology* 30(1): 1998, pp. 1-10.
- [15] Kim, K.J., Lin, D.K.J. "Simultaneous Optimization of Mechanical Properties of Steel by Maximizing Exponential Desirability Functions." *Journal of Royal Statistical Society Series C* 49: 2000, pp. 311-325.
- [16] Kim, K.J., Lin, D.K.J., "Optimization of Multiple Responses Considering Both Location and Dispersion Effects." *European Journal of Operational Research* 169: 2006, pp. 133–145.
- [17] Leite, S.C., Fragoso, M.D., "Heavy Traffic Analysis of State-Dependent Parallel Queues with Triggers and an Application to Web Search Systems." *Performance Evaluation* 67: 2010, pp. 913-928.
- [18] Miller, B.M., "Optimization of Queuing System Via Stochastic Control." *Automatica* 45: 2009, pp. 1423-1430.
- [19] Minkevicius, S., "On Extreme Values in Open Queueing Networks." *Mathematical and Computer Modelling* 50: 2009, pp. 1058-1066.