International Journal of Industrial Engineering & Production Management (2012)

June 2012, Volume 23, Number 1
pp. 55-65

http://IJIEPM.iust.ac.ir/

# Optimal Inspection Interval for a Two-Component System with Failure Dependency

H.R. Golmakani* & H. Moakedi

***Hamid Reza Golmakani,*** *Associate Professor, Industrial Engineering, Tafresh University*
***Hamid Moakedi,*** *Master of Science, Industrial Engineering, Tafresh University*

**Keywords**

Maintenance,
Inspection Interval,
Failure Dependency,
Two-Component System

**ABSTRACT**

*In this paper, optimization of periodic inspection interval for a two-component system with failure dependency is presented. Failure of the first component is soft, namely, it does not cause the system stop, but it increases the system operating costs. The second component's failure is hard, i.e. as soon as it occurs, the system stops operating. Any failure of the second component increases the first component's failure rate. Failure of the first component is only detected if inspection is performed. Thus, the first component is periodically inspected and if found failed, it is perfectly repaired and it is restored to as good as new. Failure of the second component is detected as soon as it occurs. Since this failure causes the system stop, it is immediately replaced. It is assumed that the time for replacement or repaired is negligible. We model the first component's failure as a non-homogeneous Poisson process (NHPP) with increasing failure rate and the second component's failure as a homogeneous Poisson process (HPP) with constant failure rate. The objective is to find the optimal inspection interval for the first component such that the expected total cost per unit time is minimized. A simplified numerical example along with sensitivity analysis on cost parameters is given.*



* Corresponding author. Hamid Reza Golmakani
**Email**: *golmakni@mie.utoronto.ca*

نشـــریه بین المللـــی مهنـدسی صنـایع و مدیـــریت تولیـد

شمـــاره ۱، جلـــد ۲۳، خـــرداد ۱۳۹۱
صفحـــه ۶۵-۵۶

نشریه بین المللی مهندسی صنایع و مدیریت تولید
دانشگاه علم و صنعت ایران

ISSN: 2008-4870

http://IJIEPM.iust.ac.ir/


# بهینه‌سازی فواصل بازرسی برای یک سیستم دو مولفه‌ای پیچیده


**حمیدرضا گل‌مکانی* و حمید موکدی**



**کلمات کلیدی**

نگهداری و تعمیرات،
بهینه‌سازی فواصل بازرسی،
وابستگی خرابی،
سیستم دو مولفه‌ای.



**چکیده:**

در این مقاله، بهینه‌سازی فواصل بازرسی برای یک سیستم دو مولفه‌ای با وابستگی خرابی بین مولفه‌ها ارائه شده است. در سیستم مورد مطالعه، خرابی‌های مولفه‌ی اول از نوع نرم بوده و طبق فرآیند غیرهمگن پوآسن با نرخ خرابی افزایشی رخ می‌دهند. خرابی‌های مولفه‌ی دوم از نوع سخت بوده و طبق فرآیند همگن پوآسن با نرخ خرابی ثابت رخ می‌دهند. هر خرابی نرمِ مولفه‌ی اول تاثیری روی خرابی مولفه‌ی دوم ندارد، اما هر خرابی سختِ مولفه‌ی دوم باعث ایجاد شوک روی مولفه‌ی اول شده، نرخ خرابی آن را افزایش می‌دهد. خرابی‌های نرم مولفه‌ی اول موجب توقف سیستم نمی‌شوند، معذلک موجب افزایش هزینه‌های عملیاتی سیستم می‌گردند. از آنجا که خرابی‌های نرم مولفه اول فقط در زمان بازرسی قابل شناسایی هستند، این مولفه در فواصل زمانی معینی بازرسی می‌شود و در صورت مشاهده خرابی در حین بازرسی، بطور کامل تعمیر شده، وضعیت این مولفه به وضعیت مشابه نو تبدیل می‌گردد. خرابی‌های سخت مولفه دوم، به محض وقوع، مشاهده و باعث توقف کامل سیستم می‌شوند. بدین ترتیب به محض وقوع خرابی این مولفه، تعویض آن صورت می‌گیرد. هدف، تعیین بهترین فاصله زمانی بین بازرسی‌های متوالی مولفه‌ی اول است، بگونه‌ای که متوسط هزینه‌ی کل در واحد زمان حداقل گردد. در پایان برای تشریح بیشتر مدل پیشنهادی، یک مثال عددی آورده شده است.


## ۱. مقدمه

سیستم‌های چند مولفه‌ای، سیستم‌هایی هستند که از چند جزء یا مولفه‌ی مختلف تشکیل شده‌اند. وابستگی بین مولفه‌ها موجب می‌شود تا مدل‌سازی و بهینه‌سازی فعالیت‌های نگهداری و تعمیرات این سیستم‌ها بسیار پیچیده شود [۱]. در نگهداری و تعمیرات سیستم‌های چند مولفه‌ای، هدف این است که با تعیین نوع وابستگی بین مولفه‌ها، یک سیاست بهینه‌ی نگهداری و تعمیرات برای سیستم ارائه نمود [۲]. وابستگی بین مولفه‌ها را می‌توان به سه نوع، وابستگی اقتصادی، وابستگی ساختاری و وابستگی خرابی تقسیم نمود [۲-۱]. منظور از وابستگی اقتصادی بین مولفه‌ها این است که نگهداری و تعمیرات هم‌زمان مولفه‌ها به صورت گروهی در مقایسه با نگهداری و تعمیرات هر مولفه به صورت انفرادی، موجب کاهش هزینه‌ها می‌شود [۴-۳]. وابستگی ساختاری در سیستم‌هایی وجود دارد که چند مولفه با هم به لحاظ ساختاری یک زیرسیستم را تشکیل می‌دهند، در نتیجه قبل از اینکه مولفه‌های معیوب در زیرسیستم بتوانند تعمیر یا تعویض شوند، لازم است برخی از مولفه‌های سالم در زیرسیستم از کارکردن متوقف و دمونتاژ شوند. وابستگی ساختاری در واقع یک وابستگی در انجام فعالیت‌های نگهداری و تعمیرات بین مولفه‌هاست [۵]. در صورت وجود وابستگی خرابی بین مولفه‌ها، خرابی برخی از مولفه‌ها روی خرابی سایر مولفه‌ها تاثیر می‌گذارد. وابستگی خرابی نیز به نوبه خود می‌تواند انواع مختلفی داشته باشد. در [۶]، در یک سیستم دو مولفه‌ای، سه نوع وابستگی خرابی بین مولفه‌ها در نظر گرفته شده است. در وابستگی خرابی نوعِ اول هر خرابی مولفه‌ی اول به احتمال $p$ موجب خرابی مولفه‌ی دوم می‌شود ($0 \le p \le 1$) و به احتمال $1-p$ روی مولفه‌ی دوم تاثیری نمی‌گذارد. در نوع دوم وابستگی خرابی هر خرابی


**تاریخ وصول: ۸۹/۶/۲۹**
**تاریخ تصویب: ۹۰/۲/۲۷**



***نویسنده مسئول مقاله: دکتر حمیدرضا گل‌مکانی،** دانشیار دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه تفرش، golmakni@mie.utoronto.ca

**حمید موکدی،** فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه تفرش، hamid.moakedi@gmail.com

مولفه‌ی اول باعث ایجاد شوک روی مولفه‌ی دوم می‌شود، یعنی بدون اینکه موجب خرابی مولفه‌ی دوم شود، نرخ خرابی آن را افزایش می‌دهد، معذلک هر خرابی مولفه‌ی دوم نیز به احتمال $q$ موجب خرابی مولفه‌ی اول می‌شود. در وابستگی خرابی نوع سوم خرابی هر مولفه باعث ایجاد شوک روی مولفه‌ی دیگر می‌گردد.

مدل‌های نگهداری و تعمیرات متفاوتی برای سیستم‌های چند مولفه‌ای با وابستگی خرابی ارائه شده است. در هر یک از این مدلها، بر اساس نوع سیستم، نوع وابستگی بین مولفه‌ها، نوع خرابی مولفه‌ها، نوع تعمیر و عملیات اصلاحی مولفه‌ها، نوع بازرسی و سنجش وضعیت مولفه‌ها، نوع معیار بهینه‌سازی و سایر عوامل تاثیرگذار، یک سیاست بهینه‌ی نگهداری و تعمیرات ارائه شده است [۱۴-۷].

خرابی‌های مولفه‌های سیستم بر اساس نتایج خرابی روی سیستم به دو نوع تقسیم می‌شوند: خرابی‌های سخت و خرابی‌های نرم. خرابی‌های سخت، خرابی‌هایی هستند که به محض وقوع، خود را آشکار می‌کنند و باعث توقف سیستم می‌شوند. خرابی‌های نرم، خرابی‌هایی هستند که به محض وقوع، خود را آشکار نمی‌کنند و باعث توقف سیستم نمی‌شوند، اما کارایی سیستم را کاهش می‌دهند و برای سیستم ایجاد هزینه می‌کنند [۱۶-۱۵]. در [۱۶]، برای یک سیستم متشکل از چندین مولفه که در معرض وقوع خرابی‌های سخت و نرم است، مدلی ارائه شده است که طی آن با معیار حداقل کردن متوسط مجموع هزینه‌های بازرسی، هزینه‌های تعمیر و هزینه‌های جریمه‌ی ناشی از تاخیر در شناسایی خرابی‌های نرم، فاصله‌ی زمانی بهینه بین بازرسی‌های متوالی سیستم در یک افق زمانی محدود تعیین می‌گردد. در این مدل، بین مولفه‌ها وابستگی خرابی وجود ندارد و مولفه‌هایی که خرابی سخت دارند، هیچ تاثیری در تعیین فواصل بازرسی بهینه ندارند، بنابراین از خرابی‌های سخت صرف نظر شده است.

انواع تعمیر در نگهداری و تعمیرات سیستم‌های یک یا چند مولفه‌ای عبارت‌اند از: تعمیر کامل، تعمیر جزئی، تعمیر ناقص، تعمیر بد و تعمیر خیلی بد. تعمیر کامل یک مولفه، آن را به وضعیت مشابه با نو برمی‌گرداند. تعمیر ناقص یک مولفه، آن را به وضعیتی بین وضعیت خراب و وضعیت مشابه با نو برمی‌گرداند. تعمیر جزئی یک مولفه، نرخ خرابی آن را به وضعیت قبل از خرابی برمی‌گرداند. تعمیر بد یک مولفه، نرخ خرابی آن را افزایش می‌دهد ولی موجب خرابی آن نمی‌شود. تعمیر خیلی بد یک مولفه، علاوه بر افزایش نرخ خرابی آن، موجب خرابی آن نیز می‌شود [۲۱-۱۷].

سیستم مورد مطالعه در این مقاله، یک سیستم دو مولفه‌ی با وابستگی از نوع خرابی بین مولفه‌ها است. خرابی‌های مولفه‌ی اول از نوع نرم و خرابی‌های مولفه‌ی دوم از نوع سخت می‌باشد. وابستگی خرابی بین مولفه‌ها به این صورت است که هر خرابی نرم مولفه‌ی اول تاثیری روی خرابی مولفه‌ی دوم ندارد، اما هر خرابی سخت مولفه‌ی دوم باعث ایجاد شوک روی مولفه‌ی اول می‌شود، یعنی بدون اینکه موجب خرابی مولفه‌ی اول شود، نرخ خرابی آن را افزایش می‌دهد. خرابی‌های مولفه‌ی دوم به محض وقوع شناسایی می‌شوند و مولفه مذکور بلافاصله تعویض میگردد. خرابی‌های مولفه اول فقط در زمان بازرسی شناسایی می‌شوند و لذا در زمان بازرسی در صورت مشاهده خرابی مولفه اول تعمیر کامل می‌شود. تعمیر کامل مولفه اول موجب میشود تا این مولفه به وضعیت مشابه نو درآید.

در سیستمهای چند مولفه‌ای، خرابی‌های سخت یک مولفه، به دلیل غیر قابل پیش‌بینی بودن این نوع خرابی، اغلب توسط فرآیند همگن پوآسن با نرخ خرابی ثابت مدل‌سازی میشود [۱۲، ۱۴، ۱۷، ۲۱، ۲۲ و ۲۴]. در این مقاله نیز ، فرض بر این است که وقوع خرابی‌های سخت مولفه‌ی دوم از فرآیند همگن پوآسن با نرخ خرابی ثابت تبعیت میکند. در خصوص مولفه‌های تعمیر پذیر با نوع خرابی نرم، از آنجا که اغلب با گذشت زمان احتمال وقوع خرابی‌های نرم افزایش می‌یابد، خرابی نرم این مولفه‌ها توسط فرآیند غیر همگن پوآسن با نرخ خرابی افزایشی، مدل‌سازی میگردد [۸، ۱۱، ۱۳، ۱۶، ۱۷، ۲۳ و ۲۴]. در این مقاله نیز فرض بر این است که وقوع خرابی‌های نرم مولفه‌ی اول از یک فرآیند غیر همگن پوآسن با نرخ خرابی افزایشی تبعیت میکند. بنابراین، گذشت زمان و شوک ناشی از خرابی مولفه‌ی دوم روی مولفه‌ی اول تواما موجب افزایش مضاعف نرخ خرابی مولفه‌ی اول می‌شود، معذلک تعمیر کامل مولفه‌ی اول پس از شناسایی خرابی آن در زمان بازرسی موجب می‌شود تا مولفه‌ی اول به وضعیت مشابه با نو برگردد. هدف بهینه‌سازی فاصله‌ی زمانی بین بازرسی‌های متوالی مولفه‌ی اول با معیار حداقل کردن متوسط هزینه‌ی کل مولفه‌ی اول در واحد زمان است.

در ادامه و در بخش ۲، تعریف مسئله، فرضیات، نمادهای مورد نیاز و وابستگی خرابی بین مولفه‌ها به تفصیل مطرح می‌شود. در بخش ۳، مدل پیشنهادی و چگونگی حل آن ارائه خواهد شد. در بخش ۴، یک مثال عددی کاربردی برای تشریح بیشتر مدل پیشنهادی مطرح شده و سپس در بخش ۶، نتیجه‌گیری و زمینه‌های آتی تحقیق در این حوزه آورده شده است.

## ۲. تعریف مساله، فرضیات و نمادهای مورد نیاز

یک سیستم دو مولفه‌ای با وابستگی خرابی بین مولفه‌ها را در نظر بگیرید. خرابی‌های مولفه‌ی اول از نوع نرم و خرابی‌های مولفه‌ی دوم از نوع سخت هستند. خرابی‌های نرم مولفه‌ی اول موجب توقف سیستم نمی‌شوند، اما کارایی سیستم را کاهش می‌دهند و برای سیستم ایجاد هزینه می‌کنند، بنابراین مولفه‌ی اول در

فواصل زمانی معینی بازرسی می‌شود و خرابی‌های نرم این مولفه فقط در زمان‌های بازرسی شناسایی شده و مولفه‌ی اول تعمیر کامل می‌شود. بنابراین، بین وقوع خرابی نرم مولفه‌ی اول و شناسایی آن در زمان بازرسی، یک زمان تاخیر وجود دارد که هر چه این زمان تاخیر بیشتر شود، هزینه‌ی بیشتری را به سیستم تحمیل می‌کند. خرابی‌های سخت مولفه‌ی دوم، به محض وقوع، خود را آشکار می‌کنند و باعث توقف سیستم می‌شوند. مولفه‌ی دوم بازرسی نمی‌شود و خرابی‌های سخت این مولفه به محض وقوع شناسایی شده و مولفه‌ی دوم فورا تعویض می‌شود. تعمیر کامل مولفه اول، آن را به وضعیت مشابه با نو برمی‌گرداند. در این سیستم، وابستگی خرابی بین مولفه‌ها به این صورت است که هر خرابی نرم مولفه‌ی اول تاثیری روی خرابی مولفه‌ی دوم ندارد، اما هر خرابی سخت مولفه‌ی دوم باعث ایجاد شوک روی مولفه‌ی اول می‌شود، یعنی بدون اینکه موجب خرابی مولفه‌ی اول شود، نرخ خرابی آن را افزایش می‌دهد.

خرابی‌های مولفه‌ی اول طبق فرآیند غیرهمگن پوآسن با نرخ خرابی افزایشی و خرابی‌های مولفه‌ی دوم طبق فرآیند همگن پوآسن با نرخ خرابی ثابت رخ می‌دهند. از یک طرف، گذشت زمان موجب افزایش نرخ خرابی مولفه‌ی اول می‌شود و از طرف دیگر وقوع خرابی مولفه‌ی دوم نیز باعث ایجاد شوک روی مولفه‌ی اول شده و در نتیجه موجب افزایش دفعی نرخ خرابی مولفه‌ی اول می‌شود. با تعمیر کامل مولفه‌ی اول در صورت شناسایی خرابی در زمان بازرسی، تاثیر گذشت زمان و همچنین تاثیر شوک ناشی از خرابی مولفه‌ی دوم روی نرخ خرابی مولفه‌ی اول از بین رفته و مولفه‌ی اول به وضعیت مشابه با نو برمیگردد.

در این سیستم، بازرسی مولفه اول با تواتر زیاد، از یک سو موجب افزایش هزینه‌های بازرسی و افزایش هزینه‌ی تعمیر مولفه‌ی اول (در صورت مشاهده خرابی آن) است. از سوئی دیگر، بازرسی با تواتر زیاد موجب شناسایی بهنگام تر وقع خرابی‌های نرم مولفه‌ی اول شده، هزینه‌های ناشی از تاخیر در شناسایی خرابی مولفه اول کاهش خواهد یافت. در صورت انجام بازرسی با تواتر کم، اگرچه هزینه‌های بازرسی کاهش میآبد، معذلک خرابیهای مولفه اول دیرتر تشخیص داده شده و لذا هزینه‌های ناشی از عدم اطلاع از خرابی مولفه اول افزایش میآبد.

همچنین، انجام بازرسی با تواتر کم، موجب افزایش تاثیر خرابی مولفه‌ی دوم روی مولفه‌ی اول و در نتیجه افزایش مضاعف هزینه‌های تاخیر در شناسایی خرابی مولفه‌ی اول می‌شود. بنابراین، هدف این است که فاصله‌ی زمانی بین بازرسی‌های متوالی مولفه‌ی اول به گونه‌ای تعیین شود تا متوسط هزینه‌ی کل مولفه‌ی اول در واحد زمان حداقل گردد.

علاوه بر فرضیات مذکور، فرض می‌شود:

- بازرسی‌ها کامل هستند، یعنی خرابی‌های مولفه‌ی اول بدون هیچ خطایی در زمان‌های بازرسی شناسایی می‌شوند.
- از زمان‌های بازرسی، تعمیر کامل مولفه اول و تعویض مولفه دوم صرف نظر می‌شود.
- خرابی نرم مولفه‌ی اول به خرابی سخت تبدیل نمی‌شود.
- هزینه‌ی ناشی از مولفه‌ی دوم، فقط شامل هزینه‌ی تعویض آن است و چون نرخ خرابی این مولفه، ثابت فرض شده است، هزینه‌ی ناشی از مولفه‌ی دوم در واحد زمان عدد ثابتی خواهد بود و لذا در بهینه‌سازی فواصل بازرسی مولفه‌ی اول تاثیری نخواهد داشت.

نمادهای مورد نیاز به شرح زیر می‌باشند:

- $\lambda_1(x)$ متوسط نرخ خرابی مولفه‌ی اول در زمان $x$
- $\lambda_1^{\,j}(x)$ نرخ خرابی مولفه‌ی اول در زمان $x$، به شرطی که تعداد خرابی مولفه‌ی دوم از ابتدای افق برنامه‌ریزی تا زمان $x$ برابر با $j$ باشد، $j=0,1,2,\ldots$.
- $\lambda_2$ نرخ خرابی مولفه‌ی دوم (تعداد خرابی در واحد زمان)
- $N_2(x)$ متغیر تصادفی معرف تعداد خرابی مولفه‌ی دوم از ابتدای افق برنامه‌ریزی تا زمان $x$
- $p$ درصد افزایش نرخ خرابی مولفه‌ی اول بدلیل وقوع هر خرابی مولفه‌ی دوم
- $T$ طول افق برنامه‌ریزی (مثلا یک سال) که ثابت و معلوم است.
- $n$ متغیر تصمیم‌گیری معرف تعداد بازرسی مولفه‌ی اول در طول سیکل $T$
- $\tau$ فاصله‌ی زمانی بین دو بازرسی متوالی مولفه‌ی اول در سیکل $T$ در صورت انجام $n$ بازرسی از مولفه اول ، واضح است که $\tau=T/n$.
- $\tau_L$ حداقل فاصله‌ی زمانی ممکن بین دو بازرسی متوالی مولفه‌ی اول
- $C_1^s$ هزینه‌ی هر بازرسی مولفه‌ی اول
- $C_1^d$ هزینه‌ی هر تعمیر کامل مولفه‌ی اول
- $C_1^p$ هزینه‌ی جریمه‌ی مولفه‌ی اول (هزینه‌ی تاخیر در شناسایی خرابی) به ازاء هر واحد زمانی سپری شده از وقوع خرابی مولفه‌ی اول تا شناسایی آن در زمان بازرسی
- $t$ عمر اولیه‌ی مولفه‌ی اول در شروع سیکل $T$
- $\left((k-1)\tau,k\tau\right]$ بازه‌ی بازرسی $k$ام مولفه‌ی اول در سیکل $T$، $k=1,2,\ldots,n$.
- $P_k(t)$ احتمال سالم بودن مولفه‌ی اول در بازه‌ی بازرسی $k$ام در سیکل $T$، به شرطی که بدانیم عمر اولیه مولفه‌ی

اول در شروع سیکل، $t$ بوده و مولفه‌ی اول تا زمان $t$ سالم بوده است.

- $e_k(t)$ متوسط زمان سالم بودن مولفه‌ی اول در بازه‌ی بازرسی $k$ام در سیکل $T$، به شرطی که بدانیم عمر اولیه مولفه‌ی اول در شروع سیکل، $t$ بوده و مولفه‌ی اول تا زمان $t$ سالم بوده است.
- $E\left[C_1^{\left((k-1)\tau,k\tau\right]}\right]$ متوسط هزینه‌ی کل مولفه‌ی اول در بازه‌ی بازرسی $k$ام در سیکل $T$
- $E\left[C_1^T\right]$ متوسط هزینه‌ی کل مولفه‌ی اول در سیکل $T$

## ۳. مدل پیشنهادی

همانطوریکه اشاره شد، وابستگی خرابی بین مولفه‌ها به این صورت است که هر خرابی نرم مولفه‌ی اول تاثیری روی خرابی مولفه‌ی دوم ندارد، اما هر خرابی سخت مولفه‌ی دوم باعث ایجاد شوک روی مولفه‌ی اول می‌شود و نرخ خرابی آن را به میزان $p$ درصد افزایش می‌دهد. بنابراین، ازآنجاکه $N_2(x)$ معرف تعداد خرابی مولفه‌ی دوم از ابتدای افق برنامه‌ریزی تا زمان $x$ است، $\lambda_1{}^j(x)$ برابر است با:

$$\lambda_1{}^j(x)=\lambda_1\left(x|N_2(x)=j\right)=\left(1+\frac{p}{100}\right)^j\lambda_1{}^0(x),\quad j=0,1,2,\ldots \qquad (۱)$$

که در آن $\lambda_1{}^0(x)$ نرخ خرابی مولفه اول در صورت عدم وقوع خرابی مولفه دوم تا زمان $x$ میباشد.

از آنجایی که خرابی‌های مولفه‌ی دوم طبق فرآیند همگن پوآسن با نرخ خرابی ثابت رخ می‌دهند، خواهیم داشت:

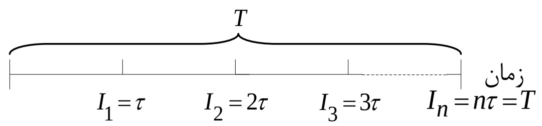
$$P\left(N_2(x)=j\right)=\frac{(\lambda_2 x)^j e^{-\lambda_2 x}}{j!}\quad ,j=0,1,2,\ldots \qquad (۲)$$

برای محاسبه متوسط نرخ خرابی مولفه‌ی اول در زمان $x$، $\lambda_1(x)$، باید توجه داشت که تعداد خرابی مولفه دوم نقش تعیین کننده‌ای در نرخ خرابی مولفه‌ی اول دارد.

تعداد خرابی مولفه دوم، $N_2(x)$، می‌تواند $j=0,1,2,\ldots$ باشد و لذا با توجه به روابط (۱) و (۲)، متوسط نرخ خرابی مولفه‌ی اول در زمان $x$ برابر است با:

$$\lambda_1(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_1\left(x|N_2(x)=j\right)\times P\left(N_2(x)=j\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\left(1+\frac{p}{100}\right)^j\lambda_1{}^0(x)\times\frac{(\lambda_2 x)^j e^{-\lambda_2 x}}{j!}=\lambda_1{}^0(x)e^{\left(\frac{p}{100}\right)\lambda_2 x} \qquad (۳)$$

مولفه‌ی اول در فواصل زمانی $\tau=T/n$، بازرسی می‌شود (شکل ۱) و خرابی‌های این مولفه فقط در زمان‌های بازرسی شناسایی شده، مولفه‌ی اول تعمیر کامل می‌شود. فرض براین است که در شروع هر سیکل، بازرسی و تعمیراحتمالی مولفه‌ی اول صورت میگیرد. سیکل $T$، یک فاصله‌ی زمانی ثابت و معلوم است و هدف این است که فاصله‌ی زمانی بهینه بین بازرسی‌های متوالی مولفه‌ی اول به گونه‌ای تعیین شود تا متوسط هزینه‌ی کل مولفه‌ی اول در سیکل $T$ حداقل گردد.



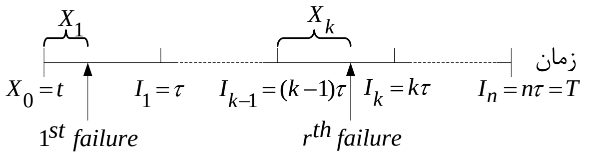

**شکل ۱. زمان‌های بازرسی‌های مولفه اول در سیکل** $T$

زمانی که مولفه‌ی اول خراب می‌شود، تا اولین بازرسی بعد از وقوع آن در وضعیت خراب باقی می‌ماند و در زمان بازرسی، تعمیر کامل می‌شود. بنابراین، در هر بازه‌ی بازرسی مولفه‌ی اول یعنی $\left((k-1)\tau,k\tau\right]$، $k=1,2,\ldots,n$، در صورت وقوع خرابی، هزینه‌ای متناسب با مدت زمان سپری شده از وقوع خرابی مولفه‌ی اول تا شناسایی آن در زمان بازرسی در نظر گرفته می‌شود. بدین ترتیب، هزینه‌های ناشی از مولفه‌ی اول در هر یک از زمان‌های بازرسی یعنی در زمان‌های $k\tau$، $k=1,2,\ldots,n$، عبارت‌اند از: ۱) هزینه‌ی انجام بازرسی، ۲) هزینه‌ی تعمیر کامل، در صورتی که مولفه‌ی اول در بازه‌ی بازرسی $k$ام خراب شده باشد و ۳) هزینه‌ی عدم اطلاع از خرابی مولفه اول برای مدت زمان سپری شده از وقوع خرابی آن تا شناسایی آن در زمان بازرسی.

$C_1^s$ هزینه‌ی هر بازرسی مولفه‌ی اول ، $C_1^d$ هزینه‌ی هر تعمیر کامل مولفه‌ی اول و $C_1^p$ هزینه‌ی جریمه‌ی مولفه‌ی اول به ازاء هر واحد زمانی سپری شده از وقوع خرابی مولفه‌ی اول تا شناسایی آن در زمان بازرسی است و لذا متوسط هزینه‌ی کل مولفه‌ی اول در بازه‌ی بازرسی $k$ام در سیکل $T$، برابر است با:

$$\begin{aligned}&E\left[C_1^{\left((k-1)\tau,k\tau\right]}\right]=\\&C_1^s+C_1^d P\left(\text{component 1 fails in}\left((\text{k-1})\tau,\text{k}\tau\right]\right)\\&+C_1^p E\left(\text{downtime of component 1 in}\left((\text{k-1})\tau,\text{k}\tau\right]\right),\\&k=1,2,\ldots,n\end{aligned} \qquad (۴)$$

فرض کنید $X_k$ متغیر تصادفی معرف مدت زمان سالم بودن مولفه‌ی اول در بازه‌ی بازرسی $k$ام در سیکل $T$ باشد. همانطوریکه در شکل ۲ دیده میشود، $X_k$ بیانگر فاصله‌ی زمانی بین $k-1$ امین بازرسی مولفه‌ی اول و زمان خرابی مولفه‌ی اول در بازه‌ی بازرسی $k$ام می‌باشد.




**شکل ۲. عمر اولیه و زمان‌های خرابی مولفه اول در سیکل $T$**

در صورتیکه مولفه‌ی اول در بازه‌ی بازرسی $k$ام خراب نشود، $X_k$ برابر با $\tau$ خواهد بود. در صورتیکه $X_0$ معرف عمر اولیه‌ی مولفه‌ی اول در شروع سیکل $T$ باشد، $P_k(t)$، احتمال سالم بودن مولفه‌ی اول در بازه‌ی بازرسی $k$ام در سیکل $T$، به شرطی که بدانیم عمر اولیه مولفه‌ی اول در شروع سیکل، $t$ بوده و مولفه‌ی اول تا زمان $t$ سالم بوده است، به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$P_k(t) = P\left(X_k = \tau \mid X_0 = t\right) \tag{۵}$$

در ادامه، با توجه به اینکه متوسط نرخ خرابی مولفه‌ی اول از رابطه‌ی (۳) معلوم است، به طور مشابه با [۱۶]، یک معادله‌ی بازگشتی برای محاسبه‌ی $P_k(t)$ با استفاده از زمان اولین خرابی، $X_1$، بدست خواهیم آورد. تابع توزیع تجمعی $X_1$ برابر است با:

$$\begin{aligned} F_1(x|t) &= P\left(X_1 \le x \mid X_0 = t\right) \\ &= \begin{cases} 1 - e^{-\int_t^{t+x} \lambda_1(s)ds} & ,0 \le x < \tau \\ 1 & ,x \ge \tau \end{cases} \end{aligned} \tag{۶}$$

و تابع چگالی احتمال $X_1$ در قسمت پیوسته آن برابر است با:

$$\begin{aligned} f_1(x|t) &= \frac{\partial}{\partial x} F_1(x|t) \\ &= \lambda_1(t+x) e^{-\int_t^{t+x} \lambda_1(s)ds} \qquad ,0 \le x < \tau \end{aligned} \tag{۷}$$

باید توجه داشت که:

$$\begin{aligned} P_1(t) &= P\left(X_1 = \tau \mid X_0 = t\right) = F_1(\tau|t) - F_1(\tau - 0|t) \\ &= e^{-\int_t^{t+\tau} \lambda_1(s)ds} \end{aligned} \tag{۸}$$

از آنجایی که مولفه‌ی اول پس از شناسایی خرابی در زمان‌های بازرسی، تعمیر کامل می‌شود، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} P_k(t) &= P\left(X_k = \tau \mid X_0 = t\right) = E\left[P\left(X_k = \tau \mid X_0 = t, X_1\right)\right] \\ &= \int_0^\tau P\left(X_k = \tau \mid X_0 = t, X_1 = x\right) f_1(x|t)\, dx \\ &\quad + P\left(X_k = \tau \mid X_0 = t, X_1 = \tau\right) P_1(t) \\ &= \int_0^\tau P_{k-1}(0)\, f_1(x|t)\, dx + P_{k-1}(t+\tau)\, P_1(t) \\ &= P_{k-1}(0)\left(1 - P_1(t)\right) + P_{k-1}(t+\tau)\, P_1(t) \end{aligned} \tag{۹}$$

بنابراین، معادله‌ی بازگشتی برای محاسبه‌ی $P_k(t)$، $t \ge 0$ ، برابر است با:

$$P_k(t) = \begin{cases} e^{-\int_t^{t+\tau} \lambda_1(s)ds} & ,k = 1 \\ P_{k-1}(0)\left(1 - P_1(t)\right) + P_{k-1}(t+\tau) P_1(t) & ,k = 2,..,n \end{cases} \tag{۱۰}$$

باید توجه داشت که از رابطه‌ی (۱۰) به ازاء $k = 2$ خواهیم داشت:

$$P_2(t) = P_1(0)\left(1 - P_1(t)\right) + P_1(t+\tau)\, P_1(t)$$

رابطه‌ی فوق بیانگر این مطلب است که مولفه‌ی اول، به احتمال $1 - P_1(t)$ در بازه‌ی بازرسی اول خراب می‌شود، بنابراین در زمان اولین بازرسی تعمیر کامل شده و در اینصورت $P_2(t)$ برابر با $P_1(0)$ خواهد شد. همچنین به احتمال $P_1(t)$ مولفه‌ی اول در بازه‌ی بازرسی اول خراب نمی‌شود و لذا در زمان اولین بازرسی تعمیر نشده و در اینصورت $P_2(t)$ برابر با $P_1(t+\tau)$ خواهد بود. به ازاء $k = 3$ از رابطه‌ی (۱۰) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} P_3(t) &= P_2(0)\left(1 - P_1(t)\right) + P_2(t+\tau)\, P_1(t) \\ &= \left[P_1(0)\left(1 - P_1(0)\right) + P_1(\tau)\, P_1(0)\right]\left(1 - P_1(t)\right) \\ &\quad + \left[P_1(0)\left(1 - P_1(t+\tau)\right) + P_1(t+2\tau)\, P_1(t+\tau)\right] P_1(t) \\ &= P_1(0)\left[\left(1 - P_1(0)\right)\left(1 - P_1(t)\right)\right] \\ &\quad + P_1(\tau)\left[P_1(0)\left(1 - P_1(t)\right)\right] \\ &\quad + P_1(0)\left[\left(1 - P_1(t+\tau)\right) P_1(t)\right] \\ &\quad + P_1(t+2\tau)\left[P_1(t+\tau) P_1(t)\right] \end{aligned}$$

رابطه‌ی فوق بیانگر این مطلب است که مولفه‌ی اول،

- به احتمال $1 - P_1(t)$ در بازه‌ی بازرسی اول و به احتمال $1 - P_1(0)$ در بازه‌ی بازرسی دوم خراب می‌شود، بنابراین در زمان اولین و دومین بازرسی تعمیر کامل شده و در اینصورت $P_3(t)$ برابر با $P_1(0)$ خواهد شد.
- به احتمال $1 - P_1(t)$ در بازه‌ی بازرسی اول خراب شده و به احتمال $P_1(0)$ در بازه‌ی بازرسی دوم خراب نمی‌شود، بنابراین در زمان اولین بازرسی تعمیر کامل شده و در زمان دومین بازرسی تعمیر نشده و در اینصورت $P_3(t)$ برابر با $P_1(\tau)$ خواهد شد.
- به احتمال $P_1(t)$ در بازه‌ی بازرسی اول خراب نشده و به احتمال $1 - P_1(t+\tau)$ در بازه‌ی بازرسی دوم خراب می‌شود، بنابراین در زمان اولین بازرسی تعمیر نشده و در زمان دومین بازرسی تعمیر کامل شده و در اینصورت $P_3(t)$ برابر با $P_1(0)$ خواهد شد.

- به احتمال $P_1(t)$ در بازه‌ی بازرسی اول و به احتمال $P_1(t+\tau)$ در بازه‌ی بازرسی دوم خراب نمی‌شود، بنابراین در زمان‌های اولین و دومین بازرسی تعمیر نشده و در اینصورت $P_3(t)$ برابر با $P_1(t+2\tau)$ خواهد شد.

فرض کنید $X_k$ متغیر تصادفی معرف زمان سالم بودن مولفه‌ی اول در بازه‌ی بازرسی $k$ام در سیکل $T$ و $X_0$ معرف عمر اولیه‌ی مولفه‌ی اول در شروع سیکل $T$ باشد، بنابراین $e_k(t)$، متوسط زمان سالم بودن مولفه‌ی اول در بازه‌ی بازرسی $k$ام در سیکل $T$، به شرطی که بدانیم عمر اولیه مولفه‌ی اول در شروع سیکل، $t$ بوده و مولفه‌ی اول تا زمان $t$ سالم بوده است، به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$e_k(t)=E\left[X_k \mid X_0=t\right] \qquad (۱۱)$$

در ادامه، همانند آنچه در خصوص $P_k(t)$ مطرح گردید و به طور مشابه با [۱۶]، یک معادله‌ی بازگشتی برای محاسبه‌ی $e_k(t)$ با استفاده از زمان اولین خرابی، $X_1$، بدست خواهیم آورد.

واضح است که $e_k(t)$ برای $k=1$ برابر است با:

$$\begin{aligned}e_1(t)&=E\left[X_1 \mid X_0=t\right]=\int_0^{\tau} x f_1(x|t)\,dx+\tau\,P_1(t)\\&=\int_0^{\tau} R_1(x|t)\,dx=\int_0^{\tau} e^{-\int_t^{t+x}\lambda_1(s)ds}\,dx\end{aligned} \qquad (۱۲)$$

برای $k\ge 2$، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}e_k(t)&=E\left[E\left[X_k \mid X_0=t,X_1\right]\right]\\&=\int_0^{\tau} E\left[X_k \mid X_0=t,X_1=x\right] f_1(x|t)\,dx\\&\quad+E\left[X_k \mid X_0=t,X_1=\tau\right] P_1(t)\\&=\int_0^{\tau} e_{k-1}(0)\,f_1(x|t)\,dx+e_{k-1}(t+\tau)\,P_1(t)\\&=e_{k-1}(0)\left(1-P_1(t)\right)+e_{k-1}(t+\tau)\,P_1(t)\end{aligned} \qquad (۱۳)$$

بنابراین، معادله‌ی بازگشتی برای محاسبه‌ی $e_k(t)$، $t\ge 0$ ، برابر است با:

$$e_k(t)=\begin{cases}\int_0^{\tau} e^{-\int_t^{t+x}\lambda_1(s)ds}\,dx & ,k=1\\ e_{k-1}(0)\left(1-P_1(t)\right)+e_{k-1}(t+\tau)P_1(t) & ,k=2,..,n\end{cases} \qquad (۱۴)$$

برای مثال، از رابطه‌ی (۱۴) به ازاء $k=2$ خواهیم داشت:

$$e_2(t)=e_1(0)\left(1-P_1(t)\right)+e_1(t+\tau)\,P_1(t)$$

رابطه‌ی فوق بیانگر این مطلب است که مولفه‌ی اول، به احتمال $1-P_1(t)$ در بازه‌ی بازرسی اول خراب می‌شود، بنابراین در زمان اولین بازرسی تعمیر کامل شده و در اینصورت $e_2(t)$ برابر با $e_1(0)$ خواهد شد. همچنین، به احتمال $P_1(t)$ مولفه‌ی اول در بازه‌ی بازرسی اول خراب نمی‌شود، و لذا در زمان اولین بازرسی تعمیر نشده و در اینصورت $e_2(t)$ برابر با $e_1(t+\tau)$ خواهد بود.

به ازاء $k=3$ ، از رابطه‌ی (۱۴) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}e_3(t)&=e_2(0)\left(1-P_1(t)\right)+e_2(t+\tau)\,P_1(t)\\&=\left[e_1(0)\left(1-P_1(0)\right)+e_1(\tau)\,P_1(0)\right]\left(1-P_1(t)\right)\\&\quad+\left[e_1(0)\left(1-P_1(t+\tau)\right)+e_1(t+2\tau)\,P_1(t+\tau)\right]P_1(t)\\&=e_1(0)\left[\left(1-P_1(0)\right)\left(1-P_1(t)\right)\right]\\&\quad+e_1(\tau)\left[P_1(0)\left(1-P_1(t)\right)\right]\\&\quad+e_1(0)\left[\left(1-P_1(t+\tau)\right)P_1(t)\right]\\&\quad+e_1(t+2\tau)\left[P_1(t+\tau)P_1(t)\right]\end{aligned}$$

رابطه‌ی فوق بیانگر این مطلب است که مولفه‌ی اول،

- به احتمال $1-P_1(t)$ در بازه‌ی بازرسی اول و به احتمال $1-P_1(0)$ در بازه‌ی بازرسی دوم خراب می‌شود، بنابراین در زمان اولین و دومین بازرسی تعمیر کامل شده و در اینصورت $e_3(t)$ برابر با $e_1(0)$ خواهد شد.
- به احتمال $1-P_1(t)$ در بازه‌ی بازرسی اول خراب شده و به احتمال $P_1(0)$ در بازه‌ی بازرسی دوم خراب نمی‌شود، بنابراین در زمان اولین بازرسی تعمیر کامل شده و در زمان دومین بازرسی تعمیر نشده و در اینصورت $e_3(t)$ برابر با $e_1(\tau)$ خواهد شد.
- به احتمال $P_1(t)$ در بازه‌ی بازرسی اول خراب نشده و به احتمال $1-P_1(t+\tau)$ در بازه‌ی بازرسی دوم خراب می‌شود، بنابراین در زمان اولین بازرسی تعمیر نشده و در زمان دومین بازرسی تعمیر کامل شده و در اینصورت $e_3(t)$ برابر با $e_1(0)$ خواهد شد.
- به احتمال $P_1(t)$ در بازه‌ی بازرسی اول و به احتمال $P_1(t+\tau)$ در بازه‌ی بازرسی دوم خراب نمی‌شود، بنابراین در زمان‌های اولین و دومین بازرسی تعمیر نشده و در اینصورت $e_3(t)$ برابر با $e_1(t+2\tau)$ خواهد شد.

بنابراین، متوسط هزینه‌ی کل مولفه‌ی اول در سیکل $T$، برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned}E\left[C_1^T\right]&=\sum_{k=1}^{n}E\left[C_1^{((k-1)\tau,k\tau]}\right]\\&=nC_1^s+\sum_{k=1}^{n}C_1^d\left(1-P_k(t)\right)+\sum_{k=1}^{n}C_1^p\left(\tau-e_k(t)\right)\end{aligned} \qquad (۱۵)$$

از آنجاکه هدف، یافتن تعداد بازرسی بهینه، $n^*$، است به گونه‌ای که متوسط هزینه‌ی کل مولفه‌ی اول در سیکل $T$، حداقل گردد، لازم است تا $E\left[C_1^T\right]$ به ازاء مقادیر مختلف $n$ محاسبه تا حداقل آن تعیین و سپس $n^*$ مشخص شود. باید توجه داشت که $\tau_L$ کوچکترین فاصله‌ی زمانی ممکن بین دو بازرسی متوالی مولفه‌ی اول است و لذا $n^*$ توسط یک حد بالا، $n_U$، محدود می‌شود و لذا خواهیم داشت: $n^* \le T/\tau_L = n_U$. با مشخص شدن $n^*$، فاصله‌ی زمانی بهینه بین بازرسی‌های متوالی مولفه‌ی اول، $\tau^*$، طبق رابطه زیر تعیین خواهد شد: $\tau^* = T/n^*$.

برای روشن‌تر شدن مدل پیشنهادی، در بخش بعدی یک مثال عددی آورده شده است.

## ۴. مثال عددی

یک سیستم تامین توان مصرفی در پست توزیع برق را در نظر بگیرید که از دو مولفه‌ی بانک خازنی (مولفه‌ی اول) و ترانس (مولفه‌ی دوم) تشکیل شده است.

خرابی‌های بانک خازنی از نوع نرم و خرابی‌های ترانس از نوع سخت هستند. بانک خازنی می‌بایستی در فواصل زمانی معینی بازرسی شود. خرابی‌های بانک خازنی فقط در زمان‌های بازرسی شناسایی شده و تعمیر کامل می‌شود. ترانس (مولفه‌ی دوم) بازرسی نمی‌شود و خرابی‌های آن به محض وقوع، شناسایی شده و ترانس فورا تعویض می‌شود. همچنین هر خرابی ترانس موجب ایجاد شوک روی بانک خازنی می‌شود، به طوری که به محض وقوع هر خرابی ترانس، نرخ خرابی بانک خازنی به میزان $p = 10\%$ درصد افزایش می‌یابد. فرض کنید تابع نرخ خرابی بانک خازنی در صورت عدم خرابی ترانس (نرخ خرابی بانک خازنی در زمان $x$ به شرطی که ترانس تا زمان $x$ سالم باشد) به صورت $\lambda_1^0(x) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1}$ باشد که در آن مقادیر β، η معادل β = 1.9، η = 10 برآورد شده است. نرخ خرابی ترانس نیز ثابت و به صورت $\lambda_2 = k$ ، $k = \frac{1}{6}$ تخمین زده شده است. هزینه‌ی هر بازرسی بانک خازنی $C_1^s = 20$، هزینه‌ی هر تعمیر کامل آن $C_1^d = 75$ و هزینه‌ی ناشی از تاخیر در شناسائی خرابی بانک خازنی به ازاء هر ماه سپری شده از وقوع خرابی تا شناسایی آن، $C_1^p = 120$ میباشد. فرض کنید سیستم در زمان شروع ، $t = 0$، در وضعیت نو میباشد. حداقل فاصله‌ی زمانی ممکن بین دو بازرسی متوالی بانک خازنی $\tau_L = 1$ ماه فرض میشود. هدف این است تا در یک افق زمانی یک ساله، $T = 12$، فاصله‌ی زمانی بهینه بین بازرسی‌های متوالی بانک خازنی را تعیین نمائیم.

ابتدا با توجه به رابطه‌ی (۳)، متوسط نرخ خرابی بانک خازنی را بصورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\lambda_1(x) = \lambda_1^0(x) e^{\left(\frac{p}{100}\right)\lambda_2 x} = \frac{1.9}{10}\left(\frac{x}{10}\right)^{0.9} e^{\left(\frac{10}{100}\right)\left(\frac{1}{6}\right)x}.$$

سپس مقادیر $E\left[C_1^T\right]$ به ازاء $n$ های کوچکتر مساوی با $n_U = T/\tau_L = 12$ محاسبه می‌شود.

بعنوان نمونه، از رابطه‌ی (۱۵) به ازاء $n = 3$، متوسط هزینه‌ی کل بانک خازنی در سیکل $T$، برابر است با:

$$\begin{aligned} E\left[C_1^T\right] &= \sum_{k=1}^{3} E\left[C_1^{(4(k-1),4k]}\right] \\ &= 3(20) + \sum_{k=1}^{3} 75\left(1 - P_k(0)\right) + \sum_{k=1}^{3} 120\left(4 - e_k(0)\right) \end{aligned}$$

که در آن $P_k(0)$ و $e_k(0)$، $k = 1,2,3$، از روابط (۱۰) و (۱۴) به طور بازگشتی و با استفاده از انتگرال‌گیری عددی بدست می‌آیند. در جدول ۱، مقادیر $P_k(0)$ و $e_k(0)$ به ازاء $k = 1,2,3$ آورده شده است. با جایگذاری مقادیر مذکور در رابطه فوق، مقدار متوسط هزینه‌ی کل بانک خازنی در سیکل $T$ با استراتژی سه بازرسی در سال ($n = 3$)، معادل $E\left[C_1^T\right] = 343.5973$ خواهد بود.

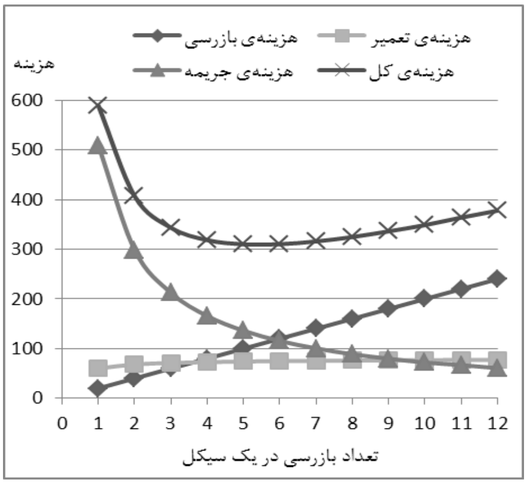
**جدول ۱. مقادیر $P_k(0)$ و $e_k(0)$ به ازاء $k = 1,2,3$**

| $k$ | $P_k(0)$ | $e_k(0)$ |
|---|---|---|
| 1 | 0.8326 | 3.7634 |
| 2 | 0.6288 | 3.2909 |
| 3 | 0.5901 | 3.1752 |

در جدول ۲، به ازاء تعداد بازرسی‌های مختلف، مقادیر هزینه‌ی بازرسی، متوسط هزینه‌ی تعمیر، متوسط هزینه‌ی جریمه عدم شناسائی خرابی و نهایتا متوسط هزینه کل ، $E\left[C_1^T\right]$، محاسبه شده است. در شکل ۳ نیز نمودار متوسط هزینه‌ی کل بانک خازنی در سیکل $T$ به ازاء مقادیر مختلف تعداد بازرسی نشان داده شده است. همچنانکه دیده می‌شود، بهترین تعداد بازرسی، $n^* = 5$ بازرسی در سال است و لذا فاصله‌ی زمانی بهینه بین بازرسی‌های متوالی بانک خازنی برابر با $\tau^* = 2.4$ ماه می‌باشد. با این استراتژی بازرسی، $E\left[C_1^T\right] = 310.1971$ در کمترین مقدار خود خواهد بود. بدیهی است زمانی که نمودار هزینه در مجاورت نقطه‌ی بهینه نسبتا افقی باشد، یعنی در صورتیکه اختلاف ناچیزی بین هزینه‌ی کل به ازاء $n^*$ و سایر $n$ های نزدیک به آن وجود داشته باشد، می‌توان $n$ ای را انتخاب نمود که اجرای بازرسی‌ها از نقطه نظر عملیاتی راحت‌تر صورت گیرد. در مثال فوق‌الذکر، به ازاء $n = 6$، اجرای بازرسی‌ها هر دو ماه یکبار، نیز هزینه‌ها افزایش زیادی نخواهد داشت.

**جدول ۲. هزینه‌های ناشی از بانک خازنی در سیکل $T$ به ازاء مقادیر مختلف تعداد بازرسی**

| تعداد بازرسی | هزینه بازرسی | هزینه تعمیر | هزینه جریمه | هزینه کل |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 20 | 60.0653 | 509.1540 | 589.2194 |
| 2 | 40 | 68.3711 | 298.7797 | 407.1509 |
| 3 | 60 | 71.1365 | 212.4608 | 343.5973 |
| 4 | 80 | 72.8890 | 165.7759 | 318.6649 |
| **5** | 100 | 74.0805 | 136.1166 | **310.1971** |
| 6 | 120 | 74.9406 | 115.5262 | 310.4668 |
| 7 | 140 | 75.5901 | 100.5788 | 316.1689 |
| 8 | 160 | 76.0976 | 88.7465 | 324.8440 |
| 9 | 180 | 76.5049 | 79.8587 | 336.3636 |
| 10 | 200 | 76.8391 | 72.0662 | 348.9052 |
| 11 | 220 | 77.1181 | 66.9660 | 364.0841 |
| 12 | 240 | 77.3545 | 60.6694 | 378.0240 |



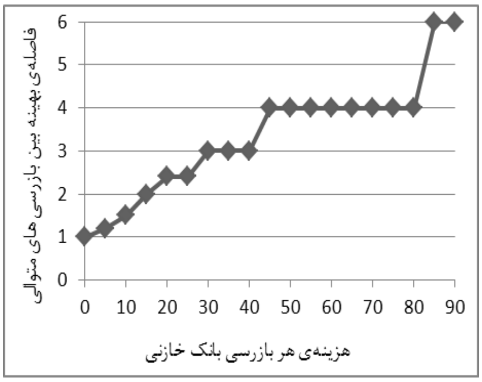

**شکل ۳. نمودار متوسط هزینه‌ی کل بانک خازنی در سیکل $T$ به ازاء مقادیر مختلف تعداد بازرسی**

واضح است که هزینه‌ی انجام هر بازرسی مولفه اول و همچنین هزینه‌ی جریمه‌ی تاخیر در شناسایی خرابی آن نقش تعیین کننده‌ای را در تعیین تعداد بازرسیهای بهینه خواهند داشت. در ادامه برای بررسی این موضوع، در مورد مثال فوق‌الذکر، مقادیر مذکور را تغییر و مدل مجددا برای این مقادیر حل شده است.

برای بررسی تاثیر مقادیر هزینه‌ی انجام هر بازرسی بانک خازنی در جواب بدست آمده از مدل، هزینه‌ی هر بازرسی بانک خازنی را مقادیری صحیح بین ۰ و ۹۰ فرض و به ازاء هریک از این مقدار، فاصله بهینه بین بازرسی‌ها محاسبه و نتایج در جدول ۳ و شکل ۴ نشان داده شده است. همچنانکه دیده می‌شود، در صورتیکه هزینه بازرسی معادل صفر باشد (با توجه به اینکه در این مثال فرض شد تا کمترین فاصله بین دو بازرسی متوالی یک ماه است)، تعداد بهینه بازرسیها در سال معادل دوازده (بیشترین تعداد بازرسی ممکن) بدست آمده است. با مقایسه مقادیر دیگرِ هزینه‌ی انجام هر بازرسی، دیده میشود که، همانگونه که انتظار می‌رفت، با افزایش هزینه بازرسی، تعداد بازرسی بهینه کاهش و لذا انجام بازرسی با فواصل بزرگتر توسط مدل پیشنهاد می‌گردد.

**جدول ۳. فاصله‌ی بهینه بین بازرسی‌های متوالی بانک خازنی به ازاء مقادیر مختلف هزینه‌ی بازرسی**

| هزینه‌ی بازرسی $C_1^s$ | تعداد بهینه بازرسی‌ها در سیکل $n^*$ | فاصله‌ی بهینه بین بازرسیهای متوالی $\tau^*$ | هزینه بهینه در سیکل $E^*\left[C_1^T\right]$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 12 | 1 | 138.0240 |
| 5 | 10 | 1.2 | 198.9052 |
| 10 | 8 | 1.5 | 244.8440 |
| 15 | 6 | 2 | 280.4668 |
| 20 | 5 | 2.4 | 310.1971 |
| 25 | 5 | 2.4 | 335.1971 |
| 30 | 4 | 3 | 358.6649 |
| 35 | 4 | 3 | 378.6649 |
| 40 | 4 | 3 | 398.6649 |
| 45 | 3 | 4 | 418.5973 |
| 50 | 3 | 4 | 433.5973 |
| 55 | 3 | 4 | 448.5973 |
| 60 | 3 | 4 | 463.5973 |
| 65 | 3 | 4 | 478.5973 |
| 70 | 3 | 4 | 493.5973 |
| 75 | 3 | 4 | 537.1509 |
| 80 | 3 | 4 | 523.5973 |
| 85 | 2 | 6 | 537.1509 |
| 90 | 2 | 6 | 547.1509 |



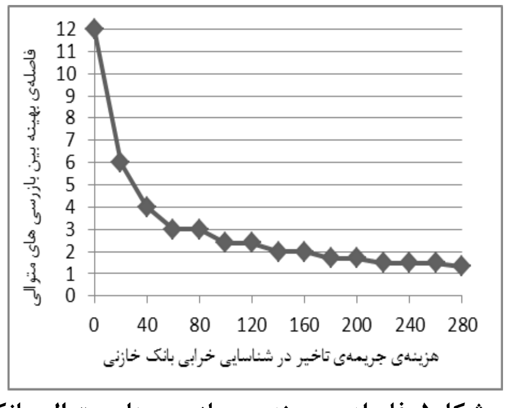

**شکل ۴. فاصله‌ی بهینه بین بازرسی‌های متوالی بانک خازنی به ازاء مقادیر مختلف هزینه‌ی بازرسی**

همچنین برای بررسی تاثیر مقادیر هزینه‌ی جریمه‌ی تاخیر در شناسایی خرابی، به ازاءِ هر ماه سپری شده از وقوع خرابی تا شناسایی آن در زمان بازرسی، در جواب بدست آمده از مدل، این

هزینه را مقادیری صحیح بین ۰ و ۲۸۰ فرض کرده و به ازاء هریک از این مقدار، فاصله بهینه بین بازرسی‌ها را محاسبه نموده‌ایم. نتایج در جدول ۴ و شکل ۵ نشان داده شده است. همچنانکه دیده می‌شود، وقتی جریمه‌ی تاخیر در شناسایی خرابی صفر فرض شود، تعداد بازرسی در کل سیکل معادل یک بدست می‌آید. به عبارت دیگر، همانگونه که انتظار میرفت، در صورت عدم وجود هزینه جریمه لزومی به انجام بازرسی نیست و صرفا آماده سازی سیستم در انتهای سیکل مورد نیاز خواهد بود. همچنین، نتایج جدول ۴ نشان میدهد که هر قدر مقادیر هزینه جریمه بیشتر باشد، مدل تعداد بازرسی بیشتری را پیشنهاد می‌دهد.

**جدول۴. فاصله‌ی بهینه بین بازرسی‌های متوالی بانک خازنی به ازاء مقادیر مختلف هزینه‌ی جریمه**

| هزینه‌ی جریمه $C_1^p$ | تعداد بهینه بازرسی‌ها در سیکل $n^*$ | فاصله‌ی بهینه بین بازرسیهای متوالی $\tau^*$ | هزینه بهینه در سیکل $E^*\left[C_1^T\right]$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 12 | 80.0653 |
| 20 | 2 | 6 | 158.1677 |
| 40 | 3 | 4 | 201.9568 |
| 60 | 4 | 3 | 235.777 |
| 80 | 4 | 3 | 263.4063 |
| 100 | 5 | 2.40 | 287.511 |
| 120 | 5 | 2.40 | 310.1971 |
| 140 | 6 | 2 | 329.7212 |
| 160 | 6 | 2 | 348.9756 |
| 180 | 7 | 1.71 | 366.4582 |
| 200 | 7 | 1.71 | 383.2214 |
| 220 | 8 | 1.50 | 398.7994 |
| 240 | 8 | 1.50 | 413.5905 |
| 260 | 8 | 1.50 | 428.3816 |
| 280 | 9 | 1.33 | 442.8418 |




**شکل۵. فاصله‌ی بهینه بین بازرسی‌های متوالی بانک خازنی به ازاء مقادیر مختلف هزینه‌ی جریمه**

## ۵. نتیجه‌گیری و پیشنهاد تحقیقات آتی

در نگهداری و تعمیرات سیستم‌های چند مولفه‌ای، هدف این است که با تعیین نوع وابستگی بین مولفه‌ها، یک سیاست بهینه‌ی نگهداری و تعمیرات برای سیستم مورد مطالعه ارائه نمود. مدل‌های نگهداری و تعمیرات متفاوتی در این خصوص ارائه شده است که در هر یک از آن‌ها بر اساس نوع سیستم، نوع وابستگی بین مولفه‌ها، نوع خرابی مولفه‌ها، نوع تعمیر و عملیات اصلاحی بر روی مولفه‌ها، نوع بازرسی و سنجش وضعیت مولفه‌ها و نوع معیار بهینه‌سازی، سیاست بهینه‌ی نگهداری و تعمیرات ارائه شده است. در این مقاله، یک سیستم دو مولفه‌ای با وابستگی خرابی بین مولفه‌ها مورد مطالعه قرار گرفت. خرابی نرم مولفه اول صرفا در بازرسی از آن شناسائی می‌شود و در صورت تاخیر در شناسائی برای سیستم هزینه در بر دارد. خرابی سخت مولفه دوم به محض وقوع، خود را آشکار می‌کند و باعث توقف سیستم می‌شود. هر خرابی سخت مولفه دوم موجب افزایش نرخ خرابی مولفه اول می‌شود. با توجه به وابستگی خرابی بین مولفه‌ها، فواصل بازرسی مولفه اول تاثیر زیادی بر هزینه‌ها خواهد داشت و لذا تعیین بهترین فاصله زمانی بین بازرسی‌های متوالی مولفه اول می‌تواند کاهش زیادی در هزینه‌ها داشته باشد. در این مقاله چگونگی مدل‌سازی سیستم مذکور و حل آن ارائه گردید. مدل پیشنهادی در بعضی از تجهیزات مرتبط با صنایع تولید، انتقال و توزیع برق قابل استفاده است. یک نمونه از این تجهیزات، سیستم تامین توان مصرفی در پست توزیع برق است. چگونگی استفاده از مدل پیشنهادی برای بهینه‌سازی زمانهای بازرسی این سیستم، در این مقاله تشریح گردید. بعنوان بسط و گسترش این تحقیق می‌توان فرض کرد که علاوه بر بازرسی دوره‌ای مولفه اول، این مولفه در صورت خرابی مولفه دوم نیز بازرسی میشود. این فرض از نقطه نظر عملیاتی بیشتر به واقعیت نزدیک است. همچنین میتوان مدل پیشنهادی را برای سیستمهای دارای بیش از دو مولفه تعمیم داد. همچنین می‌توان شرایطی را در نظر گرفت که در آن هر خرابی نرم مولفه‌ی اول نهایتا به خرابی سخت تبدیل شود و موجب توقف سیستم گردد.

## قدردانی و تشکر

در این مقاله از روش مدل‌سازی و نمادگـذاری بکاررفتـه در [۱۶] استفاده فراوانی شده است. همچنین خانم دکتر شـراره تقـی‌پـور کمک موثری در برنامه‌نویسی نموده‌اند که بدینوسیله نویسـندگان مراتب قدردانی و تشکر خود را اعلام میدارند.

## مراجع

[1] Nicola, R.P., Dekker, R., *Optimal Maintenance of Multi-Component Systems: a Review*. In: Murthy

DNP, Kobbacy AKS, editors. Complex system maintenance handbook. Amsterdam: Springer; 2008.

[2] Cho, D., Parlar, M., *A Survey of Maintenance Models for Multi-Unit Systems*. European Journal of Operational Research 1991, 51:1–23.

[3] Papadakis, I., Kleindorfer, P., *Optimizing Infrastructure Network Maintenance When Benefits are Interdependent*. OR Spectrum 2005, 27:63–84.

[4] Castanier, B., Grall, A., Berenguer, C., *A Condition-Based Maintenance Policy with Non-Periodic Inspections for a Two-Unit Series System*. Reliability Engineering & System Safety 2005, 87:109–120.

[5] Sasieni, M., *A Markov Chain Process in Industrial Replacement*. Operational Research Quarterly 1956, 7:148–155.

[6] Murthy D, Nguyen, D, *Study of Two-Component System with Failure Interaction*. Naval Research Logistics Quarterly 1985, 32:239–247.

[7] Murthy, D., Nguyen, D., *Study of a Multi-Component System with Failure Interaction*. European Journal of Operational Research 1985, 21:330–338.

[8] Sheu, S., Liou, C., *Optimal Replacement of a k-out-of-n System Subject to Shocks*. Microelectronics Reliability 1992, 32:649–655.

[9] Scarf, P., Deara, M., *Block Replacement Policies for a Two-Component System with Failure Dependence*. Naval Research Logistics 2003, 50:70–87.

[10] Jhang, J., Sheu, S., *Optimal Age and Block Replacement Policies for a Multi-Component System with Failure Interaction*. International Journal of Systems Science 2000, 31:593–603.

[11] Satow, T., Osaki, S., *Optimal Replacement Policies for a Two-Unit System with Shock Damage Interaction*. Computers and Mathematics with Applications 2003, 46:1129–1138.

[12] Zequeira, R., Berenguer, C., *On the Inspection Policy of a Two-Component Parallel System with Failure Interaction*. Reliability Engineering and System Safety 2005, 88:99–107.

[13] Lai, M., Chen, Y., *Optimal Periodic Replacement Policy for a Two-Unit System with Failure Rate Interaction*. The International Journal of Advanced Manufacturing and Technology 2006, 29:367–371.

[14] Barros, A., Berenguer, C., Grall, A., *A Maintenance Policy for Two-Unit Parallel Systems Based on Imperfect Monitoring Information*. Reliability Engineering and System Safety 2006, 91:131–136.

[15] Meeker, W., Escobar, L., *Statistical Methodology for Reliability Data*. New York: Wiley; 1998.

[16] Sharareh Taghipour, Dragan Banjevic, Andrew, K.S., Jardine, *Periodic Inspection Optimization Model for a Complex Repairable System*. Reliability Engineering and System Safety 2010, 95:944–952.

[17] Wang, H., Pham, H., *Reliability and Optimal Maintenance*. London: Springer; 2006.

[18] Pham, H., *Optimal Imperfect Maintenance Models*. In: Pham H, editor. Handbook of reliability engineering. London: Springer; 2003. p. 397–412.

[19] Pham, H., Wang, H., *Imperfect Maintenance*. Eur J Oper Res 1996, 94:425–38.

[20] Kijima, M., *Some Results for Repairable Systems with General Repair*. J Appl Probab 1989, 26(1):89–102.

[21] Pham, H., *Recent Advances in Reliability and Quality in Design*. London: Springer; 2008.

[22] Hosseini, M.M., Kerr, R.M., Randall, R.B., *An Inspection Model with Minimal and Major Maintenance for a System with Deterioration and Poisson Failures*. IEEE Trans Reliab 2000, 49:88–98.

[23] Rigdon, Steven, E., Basu, Asit P., *The Power Law Process: A Model for the Reliability of Repairable Systems.* Journal of Quality Technology 1989, 21(4):251–260.

[24] Ross, S.M., *Introduction to Probability Models*, 9th ed. New York: Academic Press; 2007.